Funktionentheorie

Stephan Kulla

29.6.2010

1 Grundlegende Begriffe

Definition (Gebiet): Ein Gebiet ist eine nichtleere, offene und kurvenzusammenhängende Teilmenge der komplexen Zahlen.

Definition (Kurve): Eine *Kurve* ist eine stetige Funktion $\alpha : \ [a, b] \to \mathbb{C}$ (mit $a < b$).

Definition (Zusammensetzung zweier Kurven): Seien $\alpha : \ [a, b] \to \mathbb{C}$ und $\beta : \ [b, c] \to \mathbb{C}$ zwei Kurven mit $\alpha(b) = \beta(b)$, dann ist

$$\alpha \oplus \beta : \ [a, c] \to \mathbb{C} : \ t \to \begin{cases} \alpha(t) \, ; \ a \le t \le b \\ \beta(t) \, ; \ b < t \le c \end{cases}$$

die *Zusammensetzung von α und β*.

Definition (Reziproke Kurve): Die *reziproke Kurve* α^- zu einer Kurve $\alpha : \ [a, b] \to \mathbb{C}$ ist definiert als $\alpha^- : \ [a, b] \to \mathbb{C} : \ t \to \alpha(b + a - t)$. Sie durchläuft damit die Kurve α in umgekehrter Richtung.

Definition (Glatte Kurve): Eine *glatte Kurve* ist eine stetig differenzierbare Kurve.

Definition (Stückweise glatte Kurve): Eine Kurve α heißt *stückweise glatt*, wenn es eine Zerlegung $a = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n = b$ gibt, so dass für alle $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ die Einschränkung $\alpha\big|_{[\tau_{k-1}, \tau_k]}$ glatt ist. Damit lässt sich α schreiben als $\alpha = \bigoplus_{k=1}^{n}$, wobei alle α_k glatt sind.

2 Komplexe Integralrechnung

2.1 Komplexe Integrale

Definiton (Komplexe Integrale): Sei $f:\ [a,\, b] \to \mathbb{C}$ eine Funktion, für das $\mathrm{Re}\,(f)$ und $\mathrm{Im}\,(f)$ integrierbare Funktionen sind (Anmerkung: $\mathrm{Re}\,(f)$ und $\mathrm{Im}\,(f)$ sind reelle Funktionen und damit ist hier die reelle Integrierbarkeit gemeint). Dann ist

$$\int_a^b f\,(x)\ \mathrm{d}x := \int_a^b \mathrm{Re}\,(f\,(x))\ \mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}\,(f\,(x))\ \mathrm{d}x$$

Satz (Eigenschaften des komplexen Integrals): Es gilt

- $\int_b^a f\,(x)\ \mathrm{d}x = -\int_a^b f\,(x)\ \mathrm{d}x$
- $\int_a^a f\,(x)\ \mathrm{d}x = 0$
- $\int_a^b (f\,(x) + g\,(x))\ \mathrm{d}x = \int_a^b f\,(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g\,(x)\ \mathrm{d}x$
- $\int_a^b \lambda \cdot f\,(x)\ \mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f\,(x)\ \mathrm{d}x$
- Ist f stetig und besitzt eine Stammfunktion F (also $F' = f$). so gilt $\int_a^b f\,(x)\ \mathrm{d}x = F\,(b) - F\,(a)$
- $\left|\int_a^b f\,(x)\ \mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f\,(x)|\ \mathrm{d}x$
- *Substitutionsregel:* Seien $I_1,\, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ reelle Intervalle und $a,\, b \in I_1$ sowie $f:\ I_2 \to \mathbb{C}$ stetig und $\phi:\ I_1 \to I_2$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f\,(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f\,(\phi\,(x))\,\phi'\,(x)\ \mathrm{d}x$$

- *Partielle Integration:* Sind $f,\, g:\ [a,\, b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_a^b f\,(x)\,g'\,(x)\ \mathrm{d}x = [f\,(x)\,g\,(x)]_a^b - \int_a^b f'\,(x)\,g\,(x)\ \mathrm{d}x$$

2.2 Holomorphe Funktion

2.2.1 Grundlagen

Definition (Holomorphe Funktion): Eine Funktion $f:\ D \to \mathbb{C}$ (Dheißt *holomorph* oder *analytisch*, wenn sie in jedem Punkt aus D komplex ableitbar ist.

Satz (Ganze Funktion): Eine *ganze Funktion* ist eine analytische Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

2.2.2 Eigenschaften holomorpher Funktionen

Satz (Satz von Liouville): Jede ganze (also analytische Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$) und beschränkte Funktion ist konstant.

Satz (Fundmentalsatz der Algebra): Jedes komplexe Polynom besitzt eine komplexe Nullstelle. Damit zerfällt jedes komplexe Polynom in Linearfaktoren.

2.3 Komplexe Kurvenintegrale

Definition (Komplexes Kurvenintegral): Sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine glatte Kurve und $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, deren Definitionsbereich die Kurve enthält (also $\alpha([a, b]) \subseteq G$). Dann ist das komplexe Kurvenintegral $\int_\alpha f(x)\, \mathrm{d}x$ definiert durch

$$\int_\alpha f(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b f(\alpha(x))\, \alpha'(x)\, dx$$

Ist α eine stückweise glatte (also $\alpha = \bigoplus_{k=1}^n \alpha_k$, wobei alle α_k glatte Kurven sind), so ist

$$\int_\alpha f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\bigoplus_{k=1}^n \alpha_k} f(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \int_{\alpha_k} f(x)\, \mathrm{d}x$$

Definiton (Bogenlänge einer Kurve): Die Länge $\mathrm{L}(\alpha)$ einer glatten Kurve $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\mathrm{L}(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(x)|\, \mathrm{d}x$$

Ist α eine stückweise glatte (also $\alpha = \bigoplus_{k=1}^n \alpha_k$, wobei alle α_k glatte Kurven sind), so ist

$$\mathrm{L}(\alpha) = \mathrm{L}\left(\bigoplus_{k=1}^n \alpha_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathrm{L}(\alpha_k)$$

Satz (Eigenschaften komplexer Kurvenintegrale): Im Folgenden sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine stückweise glatte Funktion und $f, g : \alpha([a, b]) \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen. Komplexe Kurvenintegrale besitzen folgende Eigenschaften

- $\int_\alpha (f(x) + g(x))\, \mathrm{d}x = \int_\alpha f(x)\, \mathrm{d}x + \int_\alpha g(x)\, \mathrm{d}x$

- $\int_\alpha \lambda \cdot f(x)\, \mathrm{d}x = \lambda \int_\alpha f(x)\, \mathrm{d}x$
- $\left|\int_\alpha f(x)\, \mathrm{d}x\right| \leq C \cdot \mathrm{L}(\alpha)$, wenn $|f(x)| \leq C$ für alle x im Bild von α
- *Transformationsinvarianz:* Für eine stetig differenzierbare Funktion $\phi:\ [c, d] \to [a, b]$ mit $\phi(c) = a$ und $\phi(d) = b$ gilt

$$\int_\alpha f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\alpha \circ \phi} f(x)\, \mathrm{d}x$$

- Wenn $f:\ D \to \mathbb{C}$ (wobei D offen ist) eine Stammfunktion F besitzt (also $F' = f$), so gilt

$$\int_\alpha f(x)\, \mathrm{d}x = F(\alpha(b)) - F(\alpha(a))$$

  Ist α geschlossen (also $\alpha(a) = \alpha(b)$), so gilt nach obiger Gleichung $\int_\alpha f(x)\, \mathrm{d}x = 0$.

Satz: Sei $f:\ D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf dem Gebiet D. Es sind dann folgende Aussagen äquivalent

- f besitzt eine holomorphe Stammfunktion auf D
- Jedes Kurvenintegral über f auf einer geschlossenen Kurve ist gleich 0.
- Jedes Kurvenintegral über f hängt nur von Ausgangs- und Endpunkt ab.

2.4 Causchyscher Integralsatz

Satz (Integralsatz für Dreieckswege): Sei $f:\ D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann ist jedes Kurvenintegral über f auf einer dreieckigen Kurve, deren Dreiecksfläche ganz in D liegt, gleich 0.

Definition (Elementargebiete): Ein Gebiet heißt *Elementargebiet*, wenn jede analytische Funktion auf diesem Gebiet eine holomorphe Stammfunktion besitzt. Elementargebiete sind genau alle einfach zusammenhängende Gebiete.

Satz (Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete): Jede analytische Funktion besitzt auf einem Sterngebiet besitzt eine Stammfunktion. Sterngebiete sind damit Elementargebiete.

Satz: Sei $f:\ D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet D, die nirgends auf D verschwindet (also $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$). Dann existiert eine holomorphe Funktion $h:\ D \to \mathbb{C}$ mit $\exp(h(z)) = f(z)$ für alle $z \in D$. Damit existiert für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ eine analytische Funktion $H:\ D \to \mathbb{C}$ mit $H^n = f$.

2.5 Causchysche Integralformel

Satz (Causchysche Integralformel): Sei $f: \ D \to \mathbb{C}$ ($D \subseteq \mathbb{C}$ offen) eine analytische Funktion. Sei $z_0 \in D$ sowie $R \in \mathbb{R}_{>0}$ und die abgeschlossene Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C}: \ |z - z_0| \leq R\} \subseteq D$. Dann ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\alpha \frac{f(x)}{x - z} \, \mathrm{d}x$$

für alle z aus der offenen Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C}: \ |z - z_0| \leq R\}$ und $\alpha: \ [0, 1] \to \mathbb{C}: \ t \mapsto z_0 + R\exp(2\pi \mathrm{i} t)$.

Satz (Mittwelwertgleichung): Sei $f: \ D \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion ($D \subseteq \mathbb{C}$ offen). Sei $z_0 \in D$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\{z \in \mathbb{C}: \ |z - z_0| \leq r\} \subseteq D$. Dann ist

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r\exp(it)) \, \mathrm{d}t$$

Satz (Verallgemeinerte Causchysche Integralformel): Sei $f: \ D \to \mathbb{C}$ ($D \subseteq \mathbb{C}$ offen) eine analytische Funktion. Sei $z_0 \in D$ sowie $R \in \mathbb{R}_{>0}$ und die abgeschlossene Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C}: \ |z - z_0| \leq R\} \subseteq D$. Dann ist

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\alpha \frac{f(x)}{(x - z)^{n+1}} \, \mathrm{d}x$$

für alle z aus der offenen Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C}: \ |z - z_0| \leq R\}$ und $\alpha: \ [0, 1] \to \mathbb{C}: \ t \mapsto z_0 + R\exp(2\pi \mathrm{i} t)$.

3 Potenzreihen

Satz: Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit $c_n \in \mathbb{C}$ eine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten. Wenn die Reihe für ein $z_0 \neq 0$ konvergiert, dann konvergiert die Reihe absolut und gleichmäßig in jedem Kreis $K(r) := \{z \in \mathbb{C}: \ |z| \leq r\}$ mit $0 < r < |z_0|$.

Definition (Konvergenzradius): *Der Konvergenzradius* R einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ist definiert als

$$R := \sup \left\{ |z|: \ \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ konvergiert} \right\}$$

Nach dem obigen Satz konvergiert die Potenzzeihe auf jeder Kreisscheibe, deren Radius kleiner als der Konvergenzradius ist und nach Definition divergiert die Reihe für alle komplexen Zahlen z, deren Betrag größer als der Konvergenzradius ist.

Satz (Formel von Cauchy-Hadamard): Für den Konvergenzradius einer komplexen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ gilt

$$R = \frac{1}{\limsup \mathrm{TODO}}$$

Satz (Konvergenzradius der formal differenzierten Potenzreihe): Wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ den Konvergenzradius R besitzt, dann besitzt auch die formal differenzierte Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n z^n$ den Konvergenzradius R.

Definition (Holomorphe Funktion): Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene, nichtleere Teilmenge. Eine Funktion $f: U \to \mathbb{C}$ heißt *analytisch* oder *holomorph*, wenn es um jeden Punkt $a \in U$ eine Umgebung $B_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\} \subset U$ mit $r > 0$ gibt, so dass sich f in U in einer Potenzreihe entwickeln lässt.

Satz: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die nicht identisch 0 ist. Dann ist die Menge der Nullstellen von f isoliert, dass heißt, dass es für jede Nullstelle a von f eine Umgebung U gibt, so dass $f(z) \neq 0$ für alle $z \in U \setminus \{0\}$.

Satz (Identitätssatz): Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und seien $f, g: G \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen. Sei $A := \{z \in G : f(z) = g(z)\}$. Wenn A einen Häufungspunkt in G besitzt, ist f mit g identisch (also $\forall z \in G : f(z) = g(z)$.

Satz (Weierstraßscher Doppelreihensatz): Sei $c_{kl} \in \mathbb{C}$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$. Es sind folgende Aussagen äquivalent:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} |c_{kl}| < \infty \\
\Leftrightarrow &\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |c_{kl}| < \infty \\
\Leftrightarrow &\lim_{n\to\infty} \sum_{l \leq n,\, k \leq n} |c_{kl}| < \infty \\
\Leftrightarrow &\lim_{n\to\infty} \sum_{k+l \leq n} |c_{kl}| < \infty
\end{aligned}$$

Ist eine der obigen Aussagen erfüllt (und damit alle obigen Aussagen erfüllt), dann existieren die Grenzwerte

$$c_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{kl}$$

$$c_2 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{kl}$$

$$c_3 = \lim_{n\to\infty} \sum_{l\leq n,\, k\leq n} c_{kl}$$

$$c_4 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k+l\leq n} c_{kl}$$

und es gilt $c_1 = c_2 = c_3 = c_4$.

Satz (Cauchy-Produkt von Potenzreihen): Seien $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ zwei konvergente Potenzreihen mit Konvergenzradius r_f bzw. r_g.Dann gilt:

$$f(z)\, g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right)}_{=:\, c_n} \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

Dabei besitzt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ für $f(z) \cdot g(z)$ einen Konvergenzradius, der größer gleich $\min(r_f,\, r_g)$ ist.

Satz (Inverses von Potenzreihen): Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit positiven Konvergenzradius $R > 0$ und $f(0) =:\ a_0 \neq 0$. Dann existiert ein ρ mit $0 < \rho < r$, so dass $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \rho$. Es gilt außerdem $\frac{1}{f(z)} = \sum_{l=0}^{\infty} b_l z^l$ für $|z| < \rho$ und gewisse $b_l \in \mathbb{C}$.

Satz (Umentwicklung von Potenzreihen): TODO