Kapitel 1

Spektraltheorie beschränkter Operatoren

Definition (Voraussetzung)**.** $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum über $\mathbb{C}$

Bemerkung. Spektraltheorie ist die Verallgemeinerung der Diagonalisierung normaler Matrizen auf normale lineare Operatoren auf $\mathcal{H}$

Rückblick: Der endlich-dim. Fall

Sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, selbstadjungierte $a_{ij} = \overline{a_{ji}}\ \forall i,j$ Matrix über $\mathbb{C}$.
Lineare Algebra: $\exists$ unitäre n×n-Matrix U, so dass $A = U\,\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)U^*$
mit $U = (\phi_1, ..., \phi_n), \phi_j \in \mathbb{C}^n, A\phi_j = \lambda_j \phi_j \forall j$.

- Eigenwerte λ_j nach Vielfachheit gezählt
- ohne Einschränkung $\|\phi_j\| = 1$
- Eigenvektoren $\{\phi_1, ..., \phi_n\}$ bilden ONB von $\mathbb{C}^n$, insbesonders $\langle \phi_j, \phi_k \rangle = \delta_{jk}$

Definition (Spektraldarstellung von A)**.** Orthogonalprojektor auf EV
$\phi_\nu (\nu = 1, ..., n)$, $P_\nu := \phi_\nu \otimes \phi_\nu := \langle \phi_\nu, \cdot \rangle\, \phi_\nu = (\phi_{\nu,j}\overline{\phi_{\nu,k}})_{1 \leq j,k \leq n}$
Somit gilt: $A = \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu P_\nu$ mit $P_\nu P\nu^{'} = \delta_{\nu,\nu'} P_\nu$
(beruht auf $P_\nu P_{\nu'} = \langle \phi_\nu, \cdot \rangle\, \phi_\nu \, \langle \phi_{\nu'}, \cdot \rangle\, \phi_{\nu'} = \langle \phi_\nu, \phi_{\nu'} \rangle\, (\phi_\nu \otimes \phi_{\nu'})$)

Bemerkung. P beschränkter, linearer Operator auf $\mathcal{H}$ ist Orthogonalprojektor $\Leftrightarrow$

- P ist Projektor (d.h. $P^2 = P$)
- $\ker(P) \perp \mathrm{ran}(P)$

Behauptung: P Orthogonalprojektor $\Leftrightarrow PP^* = P$

Definition. Dirac-Maß auf $\mathbb{R}$: für $\xi \in \mathbb{R}$ sei $\delta_\xi : \mathcal{B} \to \mathbb{R}, B \mapsto \delta_\xi(B)$
wobei $\xi(B) := \begin{cases} 1, & \xi \in B \\ 0, & sonst \end{cases}$ Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-messbar: $\int_{\mathbb{R}} d\delta_\xi(\lambda) f(\lambda) = f(\xi)$.

Definition (projektorwertiges Maß)**.**

$$\mathbb{P} : \mathcal{B} \ni B \mapsto \mathbb{P}(B) := \sum_{\nu=1}^{n} \delta_{\lambda_\nu}(B) P_\nu = \sum_{\substack{\nu \in \{1,\ldots,n\} \\ \lambda_\nu \in B}} P_\nu$$

Träger von Maß P ist $spec(A) = \lambda_1, ..., \lambda_n$ & es gilt:

$$A = \sum_{\lambda \in spec(A)} P(\{\lambda\}) \lambda = \int_{\mathbb{R}} dP(\lambda) \lambda$$

Bemerkung (Bemerkung:). Projektorwertiges Maß ist endliche Summe von Dirac-Maßen; dies ist in ∞-dim Hilbert-Räumen im Allgemeinen nicht mehr so.

Definition (Funktionalkalkül)**.** für $f : spec(A) \to \mathbb{C}$ ist $f(A) := \sum_{\nu=1}^{n} f(\lambda_\nu) P_\nu$ eine selbstadjungierte Matrix.

Bemerkung. Obige Definition ist im Einklang mit der bisherigen für Polynome $f_P(\lambda) := \sum_{r=0}^{t} \gamma_r,\ \lambda^r,\ t \in \mathbb{N}_0,\ \gamma_r \in \mathbb{C}$, denn:

Linke Seite $f_P(A) \stackrel{!}{=} \sum_{r=0}^{t} \gamma_r A^r, A^0 := \mathbb{1}$, Rechte Seite: $\sum_{\nu=1}^{t} f_P(\lambda_n u) P_\nu$
Beide Seiten stimmen überein (Bew: wende auf ONB $\{\phi_\nu\}_\nu$ an)
Umschreibung: $f(A) = \int_{\mathbb{R}} d\mathbb{P}(\lambda) f(\lambda)$

1.2 Funktionalkalkül

1.1 Definition. Sei $A \in BL(\mathcal{H})$

- A selbstadjungiert $\Leftrightarrow A = A^*$
- $\mathcal{W}(A) := \{\langle \psi, A\psi \rangle \in \mathbb{C} : \psi \in \mathcal{H},\ \|\psi\| = 1\} \subset \mathbb{C}$
  $\mathcal{W}$ heißt (numerischer Wertebereich)
- $A \geq 0$ positiv (nicht-negativ) $\Leftrightarrow \langle \psi, A\psi \rangle \geq 0;\ \forall \psi \in \mathcal{H}$
  (insbesondere $\in \mathbb{R} \Rightarrow A = A^*$)

1.2 Lemma. *Sei A$\in$ BL($\mathcal{H}$). Dann ist $spec(A) \subseteq \overline{\mathcal{W}(A)}$*

Beweis. Sei $\lambda \notin \overline{\mathcal{W}(A)}$. Sei $d := dist\left(\lambda, \overline{\mathcal{W}(A)}\right) > 0$ nach Vorraussetzung, also $\forall \psi \in \mathcal{H}, \|\psi\| = 1 : d \leq |\lambda - \langle \psi, A\psi \rangle| \leq \|\psi\| \, \|(A - \lambda \mathbf{1})\| \Rightarrow A - \lambda$ ist injektiv. Ausserdem:

1. ran$(A - \lambda)$ abgeschlossen in $\mathcal{H}$ (da $(A - \lambda)^{-1} :$ ran$(A - \lambda) \to \mathcal{H}$ stetig)

2. $[\operatorname{ran}(A-\lambda)]^{\perp} = 0$, da für $0 \neq \phi \in [\operatorname{ran}(A-\lambda)]^{\perp}$ gilt $\langle \phi, (A-\lambda)\phi \rangle = 0$ $\overset{!}{\Rightarrow} \phi = 0 \quad$ (o. E. $\|\phi\| = 1$)

Somit folgt aus (1) und (2): $\operatorname{ran}(A-\lambda) = \mathcal{H}$
$\Rightarrow A-\lambda$ bijektiv $\Rightarrow \lambda \in \rho(A)$ ($\rho(A)$ ist die Resolventenmenge) also $\lambda \notin spec(A)$

□

1.3 Korollar. *Sei* $A = A^* \in \mathrm{BL}(\mathcal{H})$. *Dann ist* $\operatorname{spec}(A) \subseteq [m(A), M(A)] \subset \mathbb{R}$ *mit* $m(A) := \inf\{\langle \psi, A\psi \rangle : \psi \in \mathcal{H}, \|\psi\| = 1\}$ *und* $M(A) = \sup\{\langle \psi, A\psi \rangle : \psi \in \mathcal{H}, \|\psi\| = 1\}$. *Insbesondere für* $A \geq 0$ *gilt* $\operatorname{spec}(A) \subset [0, \infty]$.

1.4 Satz (Stetiger Funktionalkalkül)**.**
Sei $A = A^* \in \mathrm{BL}(\mathcal{H})$. *Dann* $\exists_1 \Phi : C(\operatorname{spec}(A)) \to \mathrm{BL}(\mathcal{H})$ *mit*

a) $\Phi(\mathrm{id}) = A, \Phi(1) = \mathbb{1}$, *where* $\mathrm{id} = \lambda \mapsto \lambda$ *und* $1 = \lambda \mapsto 1$

b) Φ *ist ein *-Algebren-Homomorphismus, d.h.* $\forall f, g \in C(\operatorname{spec}(A))\, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *gilt:*

   (a) $\Phi(\alpha f + \beta g) = \alpha\Phi(f) + \beta\Phi(g)$
   (b) $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$
   (c) $\Phi(\overline{f}) = \Phi(f)^*$

c) Φ *ist stetig*

Bemerkung (Notation). f(A) := $\Phi(f)$; $\forall f \in C(\operatorname{spec}(A))$

Beweis von 1.4. Strategie:

1. Zeige $\exists_1 \Phi_0$ mit obigen Eigenschaften auf Poly[spec A]. Da Poly[spec A] dicht in $C(\operatorname{spec} A)$ bzgl $\|\cdot\|_a$ (Stone-Weierstraß, Korollar I 1.51)

2. $\exists_1$ stetige Fortsetzung Φ von Φ_0 auf $C(\operatorname{spec} A)$ gemäß Fortsetzungssatz I.2.30

3. zu zeigen Φ erbt Eigenschaften [a)],b) von Φ_0

zu 1) Sei $p : \operatorname{spec}(A) \to \mathbb{C}, \lambda \mapsto \sum_{r=0}^{n} \gamma_r \lambda^r, \gamma_r \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$

einzige Wahl für Φ_0 : $\Phi(p) := \displaystyle\sum_{r=0}^{n} \gamma_r (\Phi_0(\mathrm{id}))^r$ mit $\Phi_0(\mathrm{id}) := A$ und $A^0 := \mathbb{1}$

- Einzige Möglichkeit um a) und b) zu erfüllen
- Wohldefiniert für $p_1, p_2 \in \mathrm{Poly}[\mathbb{R}], p_1 \neq p_2$, aber $p_1\restriction_{\operatorname{spec}(A)} = p_2\restriction_{\operatorname{spec}(A)}$ gilt $\Phi_0(p_1) = \Phi_0(p_2)$, da

□

1.5 Lemma. $\forall p \in \mathrm{Poly}[\mathbb{R}]$ *gilt* $\|\Phi_0(p)\| = \sup\limits_{\lambda \in \operatorname{spec}(A)} p(\lambda)$. *Dies beruht auf*

1.6 Lemma. $\forall p \in \mathrm{Poly}[\mathbb{R}]$ *gilt* $\operatorname{spec}(p(A)) = p(\operatorname{spec}(A)) := \{p(\lambda) : \lambda \in \operatorname{spec}(A)\}$

Beweis von 1.6. "$\supseteq$" Sei $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$.
$t = \lambda$ ist Nullstelle des Polynoms $p(t) - p(\lambda) = (t-\lambda)q(t) \in \operatorname{Poly}[\mathbb{R}]$
$\Rightarrow p(A) - p(\lambda) = (A-\lambda)q(A)$
Annahme: $p(\lambda) \in \rho(p(A)) \Rightarrow \mathbb{1} = (A-\lambda)q(A)[p(A)-p(\lambda)]^{-1} = q(A) \cdot [p(A)-p(\lambda)]^{-1}(A-\lambda) \Rightarrow (A-\lambda)^{-1}$ existiert. Widerspruch, also $p(\lambda) \in \operatorname{spec}(p(A))$

"$\subseteq$" Sei $\lambda \in \operatorname{spec}(p(A))$, seien $\lambda_1, ..., \lambda_n$ die Nullstellen von $p(t) - \lambda = \gamma(t-\lambda_1)...(t-\lambda_n) \Rightarrow p(A) - \lambda = \gamma(A-\lambda_1)\dots(A-\lambda_n)$. Falls $\lambda_j \in \rho(A)$ $\forall j = 1, \dots, n \Rightarrow p(A) - \lambda$ invertierbar. Widerspruch zu $\lambda \in \operatorname{spec}(p(A))$. □

Beweis von 1.5.

$$\|\Phi_0(p)\|^2 \overset{\text{Satz I.5.13e)}}{=} \|\Phi_0(p)^*\Phi_0(p)\| \overset{\text{Satz 1.5.26 b)}}{=} \sup_{\mu \in \operatorname{spec}(\Phi_0(p)^*\Phi_0(p))} |\mu| =$$

$$\overset{Lemma 1.6}{=} \sup_{\mu \in (\overline{p}p) \operatorname{spec}(A)} |\mu| = \sup_{\lambda \in \operatorname{spec}(A)} |(\overline{p}p)\lambda| = \left(\sup_{\lambda \in \operatorname{spec}(A)} |p(\lambda)| \right)^2$$

□

Fortsetzung von Beweis 1.4. Bislang $\Phi_0 : \operatorname{Poly}(\operatorname{spec}(A)) \to \operatorname{BL}(\mathcal{H})$ wohldef und erfüllt a), b).
zu c) $\operatorname{ran}(\Phi)$ abgeschlossen in $\operatorname{BL}(\mathcal{H})$, da $\Phi^{-1} : \operatorname{ran}(\Phi) \to C(\operatorname{spec}(A))$ ebenfalls Isometrie $\Rightarrow$ stetig. Kommutieren von Elementen in $\mathcal{A}$ klar für f Polynom, allgemein $f \in C(\operatorname{spec}(A))$ durch Approximationsargument.
Noch zu zeigen: Stetige Fortsetzung (aus ii)) erbt Eigenschaften b) von Φ_0 (Übung!) □

1.7 Definition.

1. $\mathcal{A} \subseteq BL(\mathcal{H})$ ist eine <u>Banach-Algebra</u> (von Operatoren) $\Leftrightarrow \overline{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}$ und $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow AB \in \mathcal{A}$
2. $\mathcal{A}$ ist $\underline{C^* - Algebra} \Leftrightarrow \mathcal{A}$ ist Banach Algebra und es gilt: $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^* \in \mathcal{A}$

Natürliche Eigenschaften des Funktionalkalküls (Zusammenfassung):

1.8 Satz. *Sei $A := A^* \in BL(\mathcal{H}), f \in C(\operatorname{spec}(A))$. Dann gilt:*

1. $\|f(A)\| = \|f\|_\infty$
2. $f \geq 0 \Rightarrow f(A) \geq 0$
3. $A\Psi = \lambda\Psi$ *(Eigenwert λ zum EV $\Psi \in \mathcal{H}$)* $\Rightarrow f(A)\Psi = f(\lambda)\Psi$
4. $\operatorname{spec}(f(A)) = f(\operatorname{spec}(A))$
5. $\mathcal{A} := \{f(A) : f \in C(\operatorname{spec}(A))\}$ *ist eine kommutative $C^* - Algebra$ normaler Operatoren mit $f(A)$ selbstadjungiert $\Leftrightarrow$ f reell*

Beweis.

1. Lemma 1.5 + Φ stetig
2. $f \geq 0 \Rightarrow \exists 0 \leq g \in C(\operatorname{spec}(A))$ mit $f = g^2 \Rightarrow \forall \psi \in \mathcal{H} : \langle \psi, f(A)\psi \rangle = \langle \psi, g(A)g(A)\psi \rangle = \langle \psi, g^*(A)g(A)\psi \rangle = \|g(A)\psi\|^2 \geq 0$

3. Klar für f Polynom, für beliebiges stetiges f durch Approximation mit Polynomen (Übung!)

4. "$\subseteq$" Sei $\mu \notin f(\text{spec}(A)) \Rightarrow g := \frac{1}{f-\mu}$ und $g(f-\mu) = (f-\mu)g = \text{id} \Rightarrow g(A) \in \text{BL}(\mathcal{H})$ und $g(A) = (f(A)-\mu)^{-1} \Rightarrow \mu \in \rho(f(A))$

   "$\supseteq$" Sei $\mu \in f(\lambda)$ für ein $\lambda \in \text{spec}(A)\, \forall n \in \mathbb{N}$ sei $g_n \in \text{Poly}[\text{spec}(A)]$ mit $\|fg_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$ ("Weyl-Folge")
   $\Rightarrow \|[f(A)-\mu]\psi_n\| \leq \|[f(A)-g_n(A)]\psi_n\| + \|[g_n(A)-g_n(\lambda)]\psi_n\| + |g_n(\lambda)-\mu|\,\|\psi_n\| \leq \frac{3}{n}\,\forall n \in \mathbb{N} \overset{\text{Übung}}{\Rightarrow} \mu \in \text{spec}(f(A))$

5. A abgeschlossen in BL($\mathcal{H}$), da ϕ Isometrie $\Rightarrow \phi^{-1} : \text{ran}(\phi) \to C(\text{spec}(A))$ kommutieren klar für Polynome p(A), für f(A) mittels Limesargument, a) und Satz 1.4 b) $\Rightarrow$ restliche Eigenschaften.

$\square$

1.9 Beispiel. Sei $A = A^* \in \text{BL}(\mathcal{H})$

1. Sei $A \geq 0 \overset{LM1.3}{\Longrightarrow} \text{spec}(A) \subseteq [0,\infty[\Rightarrow A^{-\frac{1}{2}} := \Phi(\sqrt{\cdot})$ ist positive Quadratwurzel von A; es gilt $A^{\frac{1}{2}} \geq 0$ und $A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} = A$

2. $|A| = \Phi(|\cdot|)$ erfüllt $|A| \geq 0$ und $|A|^2 = A^2$. Es gilt $|A| = \left(A^2\right)^{\frac{1}{2}}$

3. sei $\lambda \in \rho(A)$, dann $\left\|(A-\lambda)^{-1}\right\| \overset{1.8a)}{=} \sup_{t \in \text{spec}(A)} \left|\frac{1}{t-\lambda}\right| = \frac{1}{dist(\lambda, \text{spec}(A))}$

1.3 Satz von Riesz-Markov

Ziel: Identifizierung des Dualraums von C(K), wobei K kompakter, topologischer Raum, mit dem Raum der komplexen Maße endlicher Variation über K.

1.10 Definition. Sei (Ω, Σ) ein Messraum. $\mu : \Sigma \to \mathbb{C}$ heißt komplexes Maß$\Leftrightarrow$ $\forall A_j \in \Sigma;\ j \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt: $\mu\left(\dot\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j)$
[falls $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ $\sigma-$additiv, dann heißt μ ein signiertes Maß]

1.11 Bemerkung (1.11). 1. $|\mu(A)| < \infty,\ \forall A \in \Sigma$ (μ endliches Maß)

2. $\mu(\emptyset) = 0$ (aus σ-Additivität und $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$)

1.12 Satz (und Definition). *1. Sei μ ein komplexes Maß (bzw. sign. Maß) auf (Ω, Σ). Dann ist*

$$|\mu| : \Sigma \to [0,\infty[,\, A \mapsto \sup_{\substack{E_1,\ldots,E_n \in \Sigma, E_i \cap E_j = \emptyset \forall i \neq j \\ \dot\bigcup_{j=1}^n E_j = A, n \in \mathbb{N}}} \sum_{i=1}^n |\mu(E_j)|$$

ein positives endliches Maß, das Variationsmaß von μ.
$|\mu|(\Omega) =: \|\mu\| < \infty$ heißt Variationsnorm von μ.

2. $\exists\, \Phi_\mu : \Omega \to \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ (bzw $\to \{\pm 1\}$, falls signiertes Maß), so dass $\mu(A) = \int_A d\,|\mu|(\sigma)\Phi_\mu(\sigma)$

3. *$\mathcal{M}(\Omega,\Sigma) := \{\mu : \Sigma \to \mathbb{C}\}$ Vektorraum aller komplexen Maße auf Ω vermöge $(\alpha\mu_1 + \beta\mu_2)(A) := \alpha\mu_1(A) + \beta\mu_2(A)$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(\Omega,\Sigma), A \in \Sigma$ ist ein Banachraum unter der Variationsnorm. (analog für ein signiertes Maß)*

1.13 Beispiel. 1. Seien $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}$, paarweise verschieden, $\Omega = \mathbb{R}$, $\Sigma = \mathcal{B}$, $\mu := \sum_{j=1}^n \alpha_j \delta_{\xi_j}, \alpha_j \in \mathbb{C}, \delta_{\xi_j}$ ist ein komplexes Maß. Es gilt: $|\mu| = \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \delta_{\xi_j}$ und $\|\mu\| = \sum_{j=1}^N |\lambda_j|$

2. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}), \Omega = \mathbb{R}; \Sigma = \mathcal{B}; \mu := \int_\cdot dx f(x)$ komplexes Maß. Es gilt $|\mu| = \int_\cdot dx\,|f(x)|$ in 2) vom Satz ist hier $\Phi_\mu(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{|f(x)|}, & f(x) \neq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Beweis. 1. siehe z.B. Rudin, Real and Complex Analysis Kapitel 6.

2. folgt aus Radon-Nikodym für signierte/komplexe Maße (gleiche Quellen)

3. Verifiziere, dass $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathcal{M}(\Omega,\Sigma)$

   - $\|\mu\| = 0 \Rightarrow |\mu|(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0;\ \forall A \in \Sigma$
   - $\|\alpha\mu\| = |\alpha|\,\|\mu\|,\ \alpha \in \mathbb{C}$
   - $\triangle_s$-Ungleichung:

$$\|\mu_1 + \mu_2\| = \sup_{\substack{\text{disjunkte Zerlegung} \\ \{E_j\} \text{ von } \Omega}} \sum_j |(\mu_1 + \mu_2)(E_j)|$$

$$\begin{aligned} |(\mu_1 + \mu_2)(E_j)| &= |\mu_1(E_j) + \mu_2(E_j)| \le |\mu_1(E_j)| + |\mu_2(E_j)| \\ &=\le \sup_{\cdots} \sum_j |\mu_1(E_j)| + \sup_{\cdots} \sum_j |\mu_2)E_j)| \\ &= \|\mu_1\| + \|\mu_2\| \end{aligned}$$

Vollständigkeit von $\mathcal{M}$:
Sei $(\mu_n)_n$ Cauchy in $\mathcal{M}(\Omega,\Sigma)$.

$$\begin{aligned} &\overset{A\in\Sigma}{\Rightarrow} |\mu_n(A) - \mu_m(A)| = |(\mu_n - \mu_m)(A)| \le \|\mu_n - \mu_m\| \\ &\Rightarrow (\mu_n(A))_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchy in } \mathbb{C} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \exists\, \mu(A) \in \mathbb{C} : \lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A) \tag{1.1}$$

Dies definiert Mengenfunktion $\mu : \Sigma \to \mathbb{C}, A \mapsto \lim_{n\to\infty} \mu_n(A) =: \mu(A)$ Zeige:

- μ komplexes Maß (d.h. $\sigma - additiv$)
- $\|\mu_n - \mu\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Sei $\epsilon > 0$, Wähle $N_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$; $\|\mu_n - \mu_m\| < \frac{\epsilon}{2}\ \forall n, m \ge N_0$, sei $r \in \mathbb{N}$. Sei $\dot{\bigcup}_{j=1} E_j = \Omega$ eine messbare, disjunkte Zerlegung von Ω und wählen $m = m(\epsilon, \{E_j\}, r) \ge N_0 : \sum_{j=1}^r |\mu_m(E_j) - \mu(E_j)| < \frac{\epsilon}{2}$.
$\forall n \ge N_0$ (m wie eben) gilt:

$$\sum_{j=1}^{r}|\mu_n(E_j)-\mu(E_j)| \le \underbrace{\sum_{j=1}^{r}|\mu_n(E_j)-\mu_m(E_j)|}_{\|\mu_n-\mu_m\|<\frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{r}|\mu_m(E_j)-\mu(E_j)|}_{<\frac{\epsilon}{2}} < \epsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{\text{disjunkte messbare Zer-}\\ \text{legungen } \{E_j\} \text{ von } \Omega}} \sum_{j=1}^{r}|\mu_n(E_j)-\mu(E_j)| = 0 \qquad (1.2)$$

<u>Nun: σ-Additivität von μ:</u> (hier nur σ zu zeigen, Additivität aus (1) direkt). Sei $A=\dot{\bigcup}_{j\in\mathbb{N}}A_j$ disjunkte Vereinigung messbarer A_j's. Außerdem seien $k,n\in\mathbb{N}$

$$\left|\mu(A)-\sum_{j=1}^{n}\mu(A_j)\right| = \left|\mu\left(\dot{\bigcup}_{j>k}A_j\right)\right|$$
$$\le \underbrace{\left|(\mu-\mu_n)\left(\dot{\bigcup}_{j>k}A_j\right)\right|}_{I_{n,k}} + \underbrace{\underbrace{\left|\mu_n\left(\dot{\bigcup}_{j>k}A_j\right)\right|}_{\sum_{j=k+1}^{\infty}\mu_n(A_j)}}_{II_{n,k}}$$

Sei $\epsilon>0$

(a) sei $E_{1,k}:=\dot{\bigcup}_{j>k}A_j,\ E_{2,k}:=\Omega\setminus E_{1,k} \overset{2)}{\Rightarrow} \exists N(\epsilon)\in\mathbb{N},\ \forall n>N:$ $\sup|I_{n,k}|<\frac{\epsilon}{2}$

(b) fixiere n, so dass 3a gilt; wegen σ-Additivität von μ_n gilt $\lim_{k\to\infty}\mu_n\left(\dot{\bigcup}_{j>k}A_j\right)=0 \Rightarrow \exists k\in\mathbb{N}:|II_{n,k}|<\dfrac{\epsilon}{2}$

$\Rightarrow$ Behauptung (μ ist σ-additiv). Nun besagt 3: $\lim_{n\to\infty}\|\mu-\mu_n\|=0$
$\Rightarrow M$ ist vollständig.

$\square$

Wir müssen darüber suprimieren!

1.14 Korollar. *a) für $A\in\Sigma$ gilt: $|\mu(A)|\le$*[1] *$|\mu|(A)\le\|\mu\|$*

b) <u>Jordan-(Hahn-)Zerlegung:</u> Schränke μ so ein, dass $\Re\Phi_\mu\ge 0$ (bzw <0) bzw. $\Im\Phi_\mu\ge 0$ (bzw <0) $\Rightarrow \mu=\mu_1-\mu_2+i\mu_3-i\mu_4$ wobei μ_i positive, endliche Maße für $j=1,\dots,4$ und $\mu_1\perp\mu_2,\mu_3\perp\mu_4$. Für ein signiertes Maß μ ist $\mu_3=\mu_4=0$ und $|\mu|=\mu_1+\mu_2$

Anmerkung. $\mu\perp\nu$ <u>singulär</u> $\Leftrightarrow \exists\, S\in\Sigma$ mit $\mu(S^c)=0$ und $\nu(S)=0$.

1.15 Definition. Borel-Maß $\nu\ge 0$ is regulär: $\Leftrightarrow \forall B\in\mathcal{B}$ gilt:

- $\nu(B)=\sup_{C\subseteq B, C \text{ kompakt}}\nu(C)$ innere Regularität

[1] i. A. <

- $\nu(B) = \inf_{O \supseteq B, O \text{ offen}} \nu(O)$ äußere Regularität

Sei Ω ein topologischer Raum. $\mathcal{M}(\Omega) \equiv \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{B})$, wobei $\mathcal{B}$ die Borel-σ-Algebra in Ω. $\mathcal{M}_r\Omega := \{\mu \in \mathcal{M}(\Omega) : |\mu| \text{ ist regulär}\}$

1.16 Bemerkung.
- $\mathcal{M}_r(\Omega$ is abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{M}(\Omega)$ (benutze $\epsilon/3$-Argument) $\Rightarrow$ Banachraum
- falls Ω z. B. ein kompakter metrischer Raum $\Rightarrow \mathcal{M}_r(\Omega) = \mathcal{M}(\Omega)$ (siehe z.B. Rudin oder im Umkreis von Satz I.3.38)

1.17 Satz (Riesz-Markov)**.** *Sei K ein kompakter topologischer Raum. Dann ist $J : \mathcal{M}_r(K) \to C(K)^*, \mu \mapsto J\mu$ mit $(J\mu)(f) := \int_K d\mu(x) f(x) := \int_K d\,|\mu|\, \Phi_\mu(x) f(x)$ ein isometrischer Isomorphismus.*
Außerdem: μ positives Maß $\Leftrightarrow (J\mu)(f) \geq 0 \ \ \forall f \in C(K)$ mit $f \geq 0$

Beweis.
- J wohldefiniert: klar, dass $f \mapsto (J\mu)(f)$ linear,

$$\begin{aligned} \|J\mu\|_{C(K)^*} &= \sup_{0 \neq f \in C(K)} \frac{(J\mu)(f)}{\|f\|_\infty} \leq \sup_{0 \neq f \in C(K)} \frac{\int_K d\,|\mu(x) f(x)|}{\|f\|_\infty} \\ &\leq \int_K d\,|\mu|\,(x) = \|\mu\| \end{aligned} \tag{1.1}$$

  $\Rightarrow \|J\| \leq 1 \Rightarrow$ J stetig

- J Isometrie:
  $|\mu|$ regulär $\Rightarrow C(K)$ dicht in $L^1(K, |\mu|)$ [vgl. Satz I.3.38; Metrisierbarkeit wird dort nur für Regularität gebraucht]
  $\Rightarrow \exists (f_k)_k \subset C(K)$ mit $\|f_k - \phi_\mu\|_\infty \xrightarrow{k\to\infty} 0$ und $\|f_k\|_\infty = 1$

$$\Rightarrow \|\mu\| = \int_K d\,|\mu|\,(x) \phi_\mu(x) \left[\overline{\phi_\mu(x)} - \overline{f_k(x)}\right] + (J\mu)(\overline{f_k})$$

$$\Rightarrow \|\mu\| \leq \|\mu\| \, \|\phi_\mu - f_k\|_\infty + \|J\mu\| \xrightarrow{k\to\infty} \|J\mu\| \tag{1.2}$$

  Aus 1.1, 1.2 $\Rightarrow \|\mu\| = \|J\mu\|$

- J is linear: Für $B \in \mathcal{B}, f = \Xi_B$ und $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_r(K)$ ist

$$\mu_1(B) + \mu_2(B) = (\mu_1 + \mu_2)(B) \tag{1.3}$$

  nach (b) z.z. $(J(\mu_1 + \mu_2))(f) = (J\mu_1)(f) + (J\mu_2)(f) \ \forall f \in C(K)$. Dies folgt durch Approximation durch Treppenfunktionen und Benutzung von 1.3

- J bijektiv: injektiv klar, da isometrisch. surjektiv:
  i) sei $l \in C(K)^*$ mit $l(f) \geq 0$; $\forall 0 \leq f \in C(K)^*$ für $A \subseteq K$ offen sei $\mu^*(A) := \sup\{l(f) : f \in C(K) \text{ mit } 0 \leq f \leq \mathbb{1}_A\}$ für $T \subseteq K$ sei $\mu^*(T) := \inf\{\mu^*(A) : A \supseteq T, A \text{ offen}\}$
  Zeige:
    - μ^* ist äußeres Maß und wende Satz von Carathéodory an (z.B. Satz 5.3, Bauer, Maß- und Integrationstheorie) $\Rightarrow \mu^*|_{\mathcal{B}} =$: definiert reguläres Borel-Maß.

– $l(f) = \int_K d\mu(x) f(x) \; \forall f \in C(K)$

ii) Für allg. $l \in C(K)^*$ zerlege $l = l_1 + il_2$ gemäß $l_1(f) := \Re l(\Re f) - \Im l(\Im f)$ $l_2(f) := \Re l(\Im f) + \Im l(\Im f)$. Somit l_1, l_2 reellwertig. Nun zerlege l_1 und l_2 in Positiv- und Negativanteil (d.h. Anteile mit $l_{i,\pm}(f) \geq 0 \; \forall f \geq 0$) wie in Werner, S. 64 oben. Wende i an → Jordan-Zerlegung des gesuchten Maßes μ

□

1.4 Meßbarer Funktionalkalkül

Definition. Ziel: Dehne Funktionalkalkül auf beschränkte messb. Funktionen aus.

1.18 Lemma. *Für $M \subset \mathbb{C}$ kompakt, sei $\mathbb{B}(M) := \{f : M \to \mathbb{C}$ messbar und $\sup\limits_{x \in M} |f(x)| < \infty\}$. Dann gilt:*

a) $\mathbb{B}(M)$ ist Banach-Raum bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

b) Sei $C(M) \subseteq U \subseteq \mathbb{B}(M)$ mit

$$\forall (f_n)_n \subset U,\; \sup_n \|f_n\|_\infty < \infty \textit{ mit } \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \textit{ für ein } f \in U \tag{1.4}$$

Dann ist $U = \mathbb{B}(M)$

Beweis. a) Vollständigkeit gilt, da gleichmäßige Limiten beschränkter Funktionen beschränkt und Limiten messbarer Funktionen messbar sind.

b) Sei $C(M) \subseteq U \subseteq \mathbb{B}(M)$, so dass falls $(f_n)_n \subset U$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$ und $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existiere $\forall x \in \mathcal{M} \Rightarrow x \mapsto f(x) \in U$

Vorspiel (siehe z.B. Bauer , Maß und Integrationstheorie, Chap 2) Sei (Ω, Σ) ein Messraum und $\mathcal{D} \subseteq \Sigma$ mit

- $\Omega \in \mathcal{D}$
- $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^c \in \mathcal{D}$
- $A_n \in \mathcal{D} \; \forall n \in \mathbb{N}$ und $A_n \cap A_m = \emptyset \;\; \forall n \neq m \Rightarrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$

so heißt $\mathcal{D}$ Dynkin-system.
Sei ξ ein $\cap-$stabiler Erzeuger der $\sigma-$Algebra Σ mit $\xi \subset \mathcal{D} \subset \Sigma$, dann gilt $\mathcal{D} = \Sigma$
Hauptteil:. Sei

$$V := \bigcap_{\substack{C(M)\subseteq S\subseteq \mathbb{B}(M) \\ \text{S erfüllt 1.4}}} S$$

- klar: $C(M) \subseteq V \subseteq \mathbb{B}(M)$ ($\mathbb{B}(M)$ erfüllt (1.4))
- V ist Vektorraum, denn: für $f_0 \in V$ setze $V_{f_0} := \{g \in \mathbb{B}(M) : g + f_0 \in V\}$
  1. falls $f_0 \in C(M) \Rightarrow C(M) \subseteq V_{f_0}$

2. falls $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V_{f_0}$ mit $\sup\limits_n \|g_n\|_\infty < \infty$ & $\exists\, g(x) := \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)\, \forall x \in M \Rightarrow g+f_0 \in V$ (da $g_n + f_n \in V\ \forall n$, $\sup\limits_n \|g_n + f_0\| < \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) + f_0(x)$ existiert $\forall x \in M$ und V hat 1.4 $\Rightarrow g \in V_{f_0}$, d.h. V_{f_0} erfüllt 1.4.
   Somit, falls $f_0 \in C(M) \overset{\substack{\text{Def. von V}\\ C(M)\subset V_{f_0}}}{\Rightarrow} V \subseteq V_{f_0}$.
   Mit anderen Worten: $\forall f_0 \in C(M)\ \forall g \in V : f_0 + g \in V$)

3. Sei nun $g_0 \in V \overset{2}{\Rightarrow} C(M) \subseteq V_{g_0}$ außerdem wie oben V_{g_0} erfüllt 1.4 $\Rightarrow$ wie in 2 $V \subseteq V_{g_0}$, d.h. $\forall g_0 \in V\ \forall g \in V : g + g_0 \in V$.
   Abgeschlossenheit von V unter skalarer Mult. wird analog gezeigt.

- $\chi_A \in V$; $\forall A \subset \mathrm{T}_M$ (= Standardrelativtopologie auf M), denn $f_n := \min\{1, n \cdot \mathrm{dist}(\cdot, A^c)\} \in C(M)$ $f_n \in V\ \forall n$. Da V 1.4 erfüllt und $(f_n)_n$ die Vorraussetzung in 1.4 hat $\Rightarrow \chi_A = \lim\limits_{n\to\infty} f_n \in V$

- $X_B \in V\ \forall B \in \mathcal{B}(M) := \{T \cap M : T \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}\}$ da:

  1) $\chi := \mathrm{T}_M$ erzeugt $\mathcal{B}_M$ und ist $\cap -$ *stabil*
  2) $\mathcal{D} := \{B \in \mathcal{B}_M : \chi_B \in M\}$ ist Dynkinsystem
     - $M \in \mathcal{D}$, da $\chi_M = \mathbb{1} \in C(M) \subseteq V$
     - Sei B $\in \mathcal{D}$, d.h. $\chi_B \in V \overset{VVR}{\Rightarrow} 1 - \chi_B = \chi_{B^c} \in V$, d.h. $B^c \in V$
     - Seien $B_n \in \mathcal{D}$, $B_n \cap B_m = \emptyset\ \forall n, m \Rightarrow \chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n} = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \chi_{B_n} = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \chi_{B_n} =: \lim\limits_{N\to\infty} f_N$ f_N ist Folge wie in 1.4, V hat Eigenschaft 1.4 $\Rightarrow \chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n} \in V$
  3) $\xi \in \mathcal{D} \subset \mathcal{B}_M$

  $\Rightarrow \mathcal{D} = \mathcal{B}_M$, d.h. die Behauptung

- V enthält alle Treppenfunktionen, (folgt aus $\chi_B \in V\ \forall B \in \mathcal{B}_M$ und Vektorraum)

- Sei $f = (\Re f)_+ - (\Re f)_- + i(\Im f)_+ - i(\Im f)_- \in \mathcal{B}(M)$, approximiere $(\Re \setminus \Im f)_\pm \geq 0$ durch Treppenfunktionen von unten
  $\Rightarrow$ Folge die 1.4 erfüllt, V erfüllt 1.4 $\Rightarrow (\Re \setminus \Im f)_\pm \in V \overset{VR}{=} f \in V \Rightarrow V = \mathcal{B}(M)$

□

1.19 Satz (Messbarer Funktionalkalkül)**.** *Sei $A = A^* \in BL(\mathcal{H})$. Dann* $\exists_1$ $\hat{\Phi} : \mathbb{B}(\operatorname{spec} A) \to BL(\mathcal{H})$ *mit*

a) $\hat{\Phi}(\mathrm{id}) = A, \quad \hat{\Phi}(1) = \mathbb{1}$

b) $\hat{\Phi}$ *ist *-Algebren-Homomorphismus*

c) $\hat{\Phi}$ *ist stetig:* $\left(\left\|\hat{\Phi}(f)\right\| \leq \|f\|\ \forall f \in \mathbb{B}\left(\operatorname{spec} A\right)\right)$

d) Falls $(f_n) \subset \mathbb{B}(\operatorname{spec} A)$ *mit* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty \; \forall n \in \mathbb{N}$ *und* $\exists f(\lambda) = \lim_{n\in\infty} f_n(\lambda)$
$\forall \lambda \in \operatorname{spec}(A) \overset{n\in\mathbb{N}}{\Rightarrow} \forall \phi, \psi \in \mathcal{H} : \lim_{n\to\mathbb{N}} \left\langle \phi, \hat{\Phi}(f_n)\psi \right\rangle = \left\langle \phi, \hat{\Phi}(f)\psi \right\rangle$

Notation. Für $f \in \mathcal{B}(M)$ sei $f(A) := \hat{\Phi}(f)$

Beweis. Seien $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ beliebig, sei $l_{\phi,\psi} \in C(\operatorname{spec}(A)) \to \mathbb{C}, f_0 \mapsto \langle \phi, f_0(A)\psi \rangle$. Es nach Satz 1.4 ein $l_{\phi,\psi} \in C(\operatorname{spec}(A)) \overset{\text{Riesz-Markov}}{\Rightarrow}$ Es existiert komplexes, reguläres Borel-Maß $\mu_{\phi,\psi}$ auf $\operatorname{spec}(A)$, so dass $\forall f_0 \in C(\operatorname{spec}(A))$:

$$l_{\phi,\psi}(f_0) = \int_{\operatorname{spec}(A)} d\mu_{\phi,\psi}(\lambda) f_0(\lambda)$$

Die Abbildung $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{M}(\operatorname{spec}(A)), (\phi, \psi) \mapsto \mu_{\phi,\psi}$ ist eine Sesquilinearform und stetig im Sinne, dass

$$\begin{aligned} \|\mu_{\phi,\psi}\| = \|l_{\phi,\psi}\|_{C(\operatorname{spec}(A))^*} &= \sup_{0\neq f\in C(\operatorname{spec}(A))} \frac{\left|l_{\phi,\psi(f_0)}\right|}{\|f_0\|_\infty} \\ &\leq \sup_{0\neq f\in C(\operatorname{spec}(A))} \frac{\|\psi\| \, \|f_0(A)\psi\|}{\|f_0\|_\infty} \leq \|\psi\| \, \|\phi\| \end{aligned}$$

Also $\|\mu_{\phi,\psi}\| \leq \|\psi\| \, \|\phi\|$ Betrachte nun für $f \in \mathcal{B}(\operatorname{spec}(A)) \quad \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}, (\phi, \psi) \mapsto \int_{\operatorname{spec}(A)} d\mu_{\phi,\psi}(\lambda) f(\lambda)$. Dies ist eine stetige Sesquilinearform, im Sinne, dass

$$\begin{aligned} \left| \int_{\operatorname{spec}(A)} d\mu_{\phi,\psi}(\lambda) f(\lambda) \right| &\leq \int_{\operatorname{spec}(A)} d\left|\mu_{\phi,\psi}\right|(\lambda) \left|f(\lambda)\right| \\ &\leq \|f\|_\infty \|\mu_{\phi,\psi}\| \\ &\overset{1)}{\leq} \|f\|_\infty \|\psi\| \, \|\phi\| \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Satz von Lax Milgram (Übung I.29)

$\exists_1 \hat{\Phi}(f) \in Bl(\mathcal{H}) : \int_{\operatorname{spec}(A)} d\left|\mu_{\phi,\psi}\right|(\lambda) \left|f(\lambda)\right| = \left\langle \phi, \hat{\Phi}(f)\psi \right\rangle$ und $\left\|\hat{\Phi}\right\| \leq \|f\|_\infty$

$\mathcal{B}(\operatorname{spec}(A)) \Rightarrow f \mapsto \hat{\Phi}(f)$ ist linear und stetig $\Rightarrow$ c).
Außerdem für ein $f_0 \in C(\operatorname{spec}(A))\hat{\Phi}(f_0) = \Phi(f_0) \underset{SatzI.4a)}{=} f \circ (A)$ $\hat{\Phi}$ erweitert stetigen Funkionalkalkül $\quad a)$

zu d) $\lim_{n\to\infty} \left\langle \phi, \hat{\Phi}(f_n)\psi \right\rangle =^2 \int d\mu_{\phi,\psi}(\lambda) f(\lambda) = \left\langle \phi, \hat{\Phi}(f)\psi \right\rangle$

b) $\hat{\phi}$ linear, s. o.! Sei $g \in C(\operatorname{spec}(A))$ & $U_g := \left\{ f \in \mathcal{B}(\operatorname{spec}(A)) : \hat{\phi}(fg) = \hat{\phi}(f)\hat{\phi}(g) \right\}$
$\overset{Satz1.4b)}{\supseteq} C(\operatorname{spec}(A))$. Seien $f_n \in U_g \; \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$ und $\lim_{n\to\infty} f_n(\lambda) = f(\lambda) \; \forall \lambda \in \operatorname{spec}(A)$

$$\overset{\forall \phi,\psi\in\mathcal{H}}{\Rightarrow} \quad \lim\nolimits_{n\to\infty} \left\langle \phi, \hat{\phi}(f_n)\hat{\phi}(g)\psi \right\rangle \overset{d)}{=} \left\langle \phi, \hat{\phi}(f)\hat{\phi}(g)\psi \right\rangle \tag{1.5}$$

$$\lim\nolimits_{n\to\infty} \left\langle \phi, \hat{\phi}(f_n g)\psi \right\rangle \overset{d)}{=} \left\langle \phi, \hat{\phi}(fg)\psi \right\rangle \tag{1.6}$$

[2] Maj. Konvergenz

$\Rightarrow f \in U_g \Rightarrow {}^3 U_g = \mathcal{B}(\mathrm{spec}(A))$ Sei nun $f \in \mathcal{B}(\mathrm{spec}(A)) \overset{3}{\Rightarrow} C(\mathrm{spec}(A)) \subseteq U_f$ analog $U_f = \mathcal{B}(\mathrm{spec}(A))$, also $\hat{\phi}$ multiplikativ. Gleiche Argumente zeigen $\hat{\phi}(\overline{f}) = \phi(f)^*$

□

1.20 Korollar. *Sei* $A = A^* \in \mathrm{BL}(\mathcal{H})$

a) $\forall f, g \in \mathcal{B}(\mathrm{spec}(A))$ *gilt:*

- *f(A) normal*
- *f(A) g(A) = (fg)(A) = g(A)f(A) kommutieren.*

b) In Satz 1.19 d) gilt sogar starke Konvergenz

c) $\forall \psi \in \mathcal{H}$ *ist* $\mu_{\psi,\psi}$ *ein positives Maß auf* $\mathrm{spec}(A)$ *mit* $\mu_{\psi,\psi}(\mathrm{spec}(A)) = \|\psi\|$

Beweis. a) Satz 1.19 b)

b) Wir zeigen $\|f_n(A)\psi\| \xrightarrow{n\to\infty} \|f(A)\psi\|$ $\forall \psi \in \mathcal{H} \Rightarrow$ Behauptung mit: $z_n \to z \in \mathcal{H}$ schwach und $\|z_n\| \to \|z\| \Rightarrow z_n \to z$ stark. Also: $\|f_n(A)\psi\|^2 = \langle f_n(A)\psi, f_n(A)\psi\rangle = \langle \psi, f_n(A)^* f_n(A)\psi\rangle \xrightarrow{d) n\to\infty} \left\langle \psi, |f|^2(A)\psi \right\rangle = \|f(A)\psi\|^2$

c) Satz 1.8b) und Zusatz in Satz 1.17, Satz 1.4a)
$\Rightarrow \mu_{\psi,\psi}(\mathrm{spec}(A)) = \int_{\mathrm{spec}(A)} d\mu_{\psi,\psi} 1 = \langle \psi, \mathbb{1}\psi\rangle$

□

1.5 Spektralmaße

1.21 Definition. Sei $\mathcal{B}$ die Borel-σ-Algebra auf $\mathcal{RR}$, $\mathcal{B} \to \mathrm{BL}(\mathcal{H}), B \mapsto P(B)$ heißt Spektralmaß (bzw Projektor-wertiges Maß: $\Rightarrow$)

- P(B) ist Orthogonalprojektor $\forall B \in \mathcal{B}$
- $P(\emptyset), P(\mathbb{R}) = 1$
- $\forall B_n \in \mathcal{B}, B_n \cap B_m = \emptyset$ für $n \neq m \in \mathbb{N}$ gilt $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n)\psi = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(B_n)\psi$ $\forall \psi \in \mathcal{H}$ (stark σ-additiv).

1.22 Lemma. *Sei* $A = A^* \in \mathrm{BL}(\mathcal{H})$*. Dann ist* $\mathcal{B} \in B \mapsto \chi_B(A) =: P(B)$ *ein Spektralmaß mit Träger* $\mathrm{spec}(A)$*, d.h.* $P(B) = 0$ *für* $B \in \mathcal{B} \in (\mathbb{R} \cap \mathrm{spec}(A))$

Beweis.
- $P(B)$ ist Orthogonalprojektor, wegen Satz 1.19 b) und $\chi_\cdot \overline{\chi_\cdot} = \chi_\cdot$
- $P(\mathbb{R}) = \mathbb{1}$ nach Satz 1.19 a), $P(\emptyset) = 0$ folgt aus
- starke σ-Additivität: aus Satz 1.19 d) mit Korollar 1.20 b), da für $f_n := \sum_{j=1}^n \chi_{B_n} \in \mathcal{B}(\mathrm{spec}(A))$ gilt $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$ und $\lim_{n\to\infty f_n(\lambda) = \chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n}(\lambda)}$ und $\forall \in \mathrm{spec}(A)$ (wegen B_n paarweise disjunkt)

□

[3] Lemma 1.18

1.23 Bemerkung. σ-Additivität gilt i. A. nicht in der Operatornorm, da $\left\|\xi_(A)\right\| \in \{0,1\} (= 0 \Rightarrow \chi_B(A) = 0)$

Bemerkung. Nun Integration bzgl. eines Spektralmaßes P:

1.24 Lemma. *Sei P ein Spektralmaß. Für $n \in \mathbb{N}, B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, sei $f_n := \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{B_j}$ eine Treppenfunktion und*

$$\int_{\mathbb{R}} dP(\lambda) f_n(\lambda) := \sum_{j=1}^n \alpha_j P(B_j) \tag{1.1}$$

Sei $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dann existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$ und

$$\int_{\mathbb{R}} dP(\lambda) f(\lambda) := \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} dP(\lambda) f_n(\lambda) \tag{1.2}$$

existiert in der Operatornorm und ist unabhängig von der Wahl der approximierten Folge.

Beweis.

- (1.1) ist wohldefiniert, das heißt hängt nicht von der Darstellung der Treppenfunktion $f_n = \sum_j \alpha_j \chi_{B_j} = \sum_k \hat{\alpha}_k \chi_{\hat{B}_j}$ ab wegen Additivität von P.

- Existenz der gleichmäßigen Folge f_n von Treppenfunktionen (Übung)!

- Wir zeigen:
$$\left\| \int_{\mathbb{R}} dP(\lambda) f(\lambda) \right\| \leq \|f\|_\infty \tag{1.3}$$
für jede Treppenfunktion $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ Sei $f = \sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_B, \alpha_j \in \mathbb{C}, B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ \forall j$ paarweise disjunkt. O. E. Sei $\psi \in \mathcal{H}$
$$\bigcup_{j=1}^N B_j = \mathbb{R} \left\| \int_{\mathbb{R}} dP(\lambda) f(\lambda) \psi \right\|^2 \overset{\substack{B\cap\hat{B}=\emptyset \\ \Rightarrow P(B)P(\hat{B})=0}}{=} \sum_{i,j=1}^N \bar{\alpha}_j \alpha_{j'} \langle P(B_j)\psi, P(B_j)\psi \rangle$$
$$= \sum_{i,j=1}^N \bar{\alpha}_j \alpha_{j'} \|P(B_j)\psi\|^2 \delta_{jj'} \leq \max_{j=1,\ldots,N} |\alpha_j|^2 \sum_{j=1}^N \|P(B_j)\psi\|^2 =$$
$$= \|f\|_\infty^2 \langle \psi, P(B_j)\psi \rangle = \|f\|_\infty^2 \langle \psi, P(\mathbb{R})\psi \rangle \leq \|f\|_\infty^2 \|\psi\|^2$$
  - 3) $\Rightarrow$ Definition 2) wohldefiniert, das heißt Limes unabhängig von approximierender Folge.
  - (f_k) Cauchy in 2) $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} dP(\lambda) f_m(\lambda)$ Cauchy in $\mathrm{BL}(\mathcal{H}) \Rightarrow \int dP(\lambda) f(\lambda)$ existiert in $\|\cdot\|$ für $f \in \mathrm{BL}(\mathcal{H})$

□

1.25 Korollar (Zusammenfassung)**.** *Sei P ein Spektralmaß. Die Abb. $\Psi : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathrm{BL}(\mathcal{H}), f \mapsto \int_{\mathbb{R}} dP(\lambda) f(\lambda) =: \Psi(f)$ ist wohldefiniert, linear und stetig, insbesondere ist $\|\Psi(f)\| \leq \|f\|_\infty\ \forall f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Weiter gilt:*

- *f reellwertig $\Rightarrow \Psi(f) = \Psi(f)^*$*

- *Hat P kompakten Träger, d.h. $\exists K \subseteq \mathbb{R}$ mit $P(\mathbb{R} \setminus K) = 0$, dann gilt $\forall f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\int_{\mathbb{R}} dP(\lambda) f(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} dP(\lambda) f(\lambda)\chi_K(\lambda) =: \int_K dP(\lambda) f(\lambda)$, d.h. $\int_K dP(\lambda)$ existiert $\forall f \in \mathcal{B}(K)$*

Beweis. Alles wahr für Treppenfunktionen, für $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ folgen die Aussagen mittels gleichmäßiger Approximation. □

1.6 Spektralsatz

Bislang (Lemma 1.22) : selbstadjungierter Operator A erzeugt Spektralmaß mit kompaktem Träger via $\chi_{\cdot}(A)$
Jetzt: Umkehrung

1.26 Satz. *Sei P ein Spektralmaß auf $\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger und $A := \int_{\mathbb{R}} dP(\lambda)\lambda \in \mathrm{BL}(\mathcal{H})$ und $A = A^*$. Außerdem realisiert $\Psi : \mathcal{B}(\mathrm{spec}(A)) \to \mathrm{BL}(\mathcal{H})$,
$f \mapsto \int_{\mathrm{spec}(A)} dP(\lambda) f(\lambda)$ den eindeutig bestimmten messbaren Funktionalkalkül zu A, insbesondere is $P(\mathrm{spec}(A)) = \mathbb{1}$.*

Beweis. Weise (a) bis (d) aus Satz 1.19 nach $\Rightarrow$ Behauptung wegen Eindeutigkeit. Kor 1.25 $\Rightarrow$ Ψ ist linear und stetig

(c) und (b) Weise $\Psi(f)\Psi(g) = \Psi(fg)$ für Treppenfunktionen nach (benötigt: $P(B)P(\hat{B}) = P(B \cap \hat{B})$) und gehe zum Grenzwert für $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ über. Für $\Psi(\bar{f}) = \Psi(\bar{f})^*$ gehe analog vor.

(d) Falls $(f_n)_n \subset \mathcal{B}(\mathrm{spec}(A))$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$ und $f_n \xrightarrow{n\to} f \in \mathcal{B}(\mathrm{spec}(A))$ punktweise. $\Rightarrow$ $\Psi(f_n)$ konvergiert schwach gegen $\psi(f)$. Sei also $\psi, \phi \in \mathcal{H}$ und $\mu_{\phi,\psi}(B) := \langle \phi, P(B)\psi \rangle$ für $B \in \mathcal{B}$ definiert komplexwertiges Maß auf $\mathbb{R}$. Dann gilt: $\langle \phi, \Psi(f_n)\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} d\mu_{\phi,\psi}(\lambda) f_n(\lambda)$ somit $\lim_{n\to\infty} \langle \phi, \Psi(f_n)\psi \rangle =$ $= \lim_{n\to\infty} \int d\mu_{\phi,\psi}(\lambda) f_n(\lambda)$ Wegen dominierter Konvergenz und gleichmäßiger Beschränktheit von f_n ist dies gleich $\int d\mu_{\phi,\psi}(\lambda) \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda) = \langle \phi, \Psi(f)\psi \rangle$

a) Zu zeigen $P(\mathrm{spec}(A)) = \mathbb{1} (\Rightarrow A = \int_{\mathrm{spec}(A)} dP(\lambda)\lambda\ )$
Nach Vereinbarung ist supp $P \cup \mathrm{spec}(A) \subseteq]a, b]$ für $a, b \in \mathbb{R}$, d.h. $P(]a, b]) = \mathbb{1}$.
Sei $\delta = \frac{b-a}{N}$ für ein $N \in \mathbb{N}$ und $a_k = a + \delta k$ für ein $k = 0, \ldots, N$ und $f_N := \sum_{k=1}^N a_k \chi_{]a_{k-1},a_k]}$. Sei $\mu \in \mathbb{R}$ $\left\| A - \mu - \int_{]a,b]} dP(\lambda)[f_N(\lambda) - \mu] \right\| = \left\| \int_{]a,b]} dP(\lambda)[\lambda - f_N(\lambda)] \right\| \leq \|\mathrm{id} - f_N\|_{\infty,]a,b]} = \delta$ Es gilt: Seien $S, T \in \mathrm{BL}(\mathcal{H})$, T invertierbar mit $T^{-1} \in \mathrm{BL}(\mathcal{H})$ und $\|S - T\|$ linear und klein. Dann ist S invertierbar und $S^{-1} \in \mathrm{BL}(\mathcal{H})$. Insbesonders für $\|S - T\| \leq \frac{1}{2\|T^{-1}\|}$ $\Rightarrow$ $\|S^{-1}\| \leq T^{-1}$ (Übung + Neumannreihen)
Sei nun $\mu \in \rho(A)$. Dann ist $\|(A - \mu)^{-1}\| \overset{Bsp.1.9}{=} \frac{1}{\mathrm{dist}(\mu, \mathrm{spec}(A))}$ Sei $\delta = \frac{\mathrm{dist}(\mu,\mathrm{spec}(A))}{2}$. Somit ist

$$\|S^{-1}\| \leq \frac{2}{\mathrm{dist}(\mu, \mathrm{spec}(A))} (*)$$

Andererseits gilt: $S = \sum_{k=1}^{N}(a_k - \mu)P(]a_{k-1}, a_k]) =: \sum_{k=1}^{N}(a_k - \mu)P_k$ $\Rightarrow S^{-1} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k-\mu} P_k$ und $\left\|S^{-1}\right\| = \sup_{\substack{k=1,\dots,N \\ P_k\neq 0}} \left\{\frac{1}{|a_k-\mu|}\right\}$ Also: falls $|a_k - \mu| < \mathrm{dist}(\mu, \mathrm{spec}(A)) \Rightarrow P_k = 0$(Sonst Widerspruch zu (*)) $\Rightarrow$ zu $\mu \in \rho(A)$ $\exists U_\mu$ Umgebung von μ in $\mathbb{R}$ mit $P(U_\mu) = 0$ Sei $K \subset \rho(A)$ kompakt, überdecke $K \subseteq \bigcup_{l=1}^{L} U_{\mu_l},\ \mu_l \in K, \Rightarrow P(K) = 0. \Rightarrow P([a,b] \cap \rho(A)) = 0$, denn $\forall \psi \in \mathcal{H}$ ist $\mu_\psi := \langle \psi, P(\cdot)\psi \rangle$ ein Borel-Maß auf [a,b] $\Rightarrow \mu_\psi$ ist regulär (vgl. Bemerkung 1.16 bzw I.3.38) $\|P([a, b \cap \rho(A)\psi\|^2 = \mu_\psi([a,b] \cap \rho(A) = \sup_{\substack{K\subset[a,b]\cap\rho(A) \\ \text{K Kompakt}}} \mu_\psi(K) = 0$. Da $P(\mathbb{R} \setminus [a,b]) = 0 \Rightarrow P(\mathrm{spec}(A)) = \mathbb{1}$

□

1.27 Korollar (Spektralsatz für beschränkte, selbstadjungierte Operatoren)**.** *Es existiert genau eine Bijektion zwischen der Menge er selbstadjungierten Operatoren in* $\mathrm{BL}(\mathcal{H})$ *und der Menge der Spektralmaße auf* $\mathbb{R}$ *mit kompaktem Träger so dass*

$$A = \int_{\mathrm{spec}(A)} dP(\lambda)\lambda \textit{ und } P(B) = \chi_B(A)\ \forall B \in \mathcal{B}$$

gilt(insbesondere ist $\mathrm{supp}(A) = \mathrm{spec}(A)$*). Die Abbildung*

$$\mathcal{B}(\mathrm{spec}(A)) \to \mathrm{BL}(\mathcal{H}), f \mapsto \int_{\mathrm{spec}(A)} dP(\lambda)f(\lambda)$$

realisiert den messbaren Funktionalkalkül $\hat{(\phi)}$ *aus Satz 1.9*

Beweis. Noch zu zeigen: $\Psi \circ \alpha = \mathrm{id}$
Wähle $A = A^* \in \mathrm{BL}(\mathcal{H})$ und sie $P := \chi_\cdot(A)$ das zugehörige Spektralmaß. $S := \int_\mathbb{R} dP(\lambda)d\lambda$ Zeige nun A=S. Sei $f \in \{BorelFunktionen\}$ eine Stufenfunktion mit der Eigenschaften $\|f - \mathrm{id}\| \leq \epsilon$

$$\|A - S\| \leq \underbrace{\|A - f(A)\|}_{\leq \|\mathrm{id} - f\|_\infty \leq \epsilon} + \underbrace{\|f(A) - \Psi(f)\|}_{(*)} + \underbrace{\|\Psi - S\|}_{\leq \epsilon \text{ wegen } \|\int dP(\lambda)f(\lambda)\| \leq \|f\|_\infty (Cor 1.25}$$

(*) verschwindet klarerweise. $f(A) = \sum \alpha_j \chi_{B_j} = \int dP(\lambda)f(\lambda) = \Psi(f)$. □

1.28 Beispiel.
1. $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ $A = A^*$ ist eine $n \times n$ Matrix ($\to$ Kapitel 1.1)
2. $A = A^*$ kompakter Operator ($K \in \mathrm{BL}(\mathcal{H})$ ist Kompakt $\Leftrightarrow$ K schwach konvergente Folgen in $\|\cdot\|$-konvergente Folgen abbildet.), dann gilt nach Satz von Hilbert-Schmidt(I.5.39) $\exists\{\lambda_n\}_n \subset \mathbb{R}$, $\exists\{\phi_n\}$ ONB
$A = \sum_n \lambda_n \phi_n \otimes \phi_n$, wobei $\phi \otimes \phi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \psi \mapsto \langle \phi, \psi \rangle \phi\ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$
$P(B) = \sum_{n,\lambda_n \in B} \phi_n \otimes \phi_n$ (konvergiert i.d.R. nur in der starken Topologie nicht in Norm).
3. Multiplikationsoperatoren auf $L^2([0,1])$ $\psi \mapsto A\psi,\ (A\psi)(x) := x\psi(x)\ \forall x \in [0,1]$. A erfüllt $A = A^*, \|A\| = 1$.

1.29 Korollar. *Seien* $A, S \in \mathrm{BL}(\mathcal{H})$*,* $A = A^*$*, dann:* $[A, S] = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [\chi_B(A), S] = 0\ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Beweis.

$$\begin{aligned}
[A,S]=0 &\Leftrightarrow [A^n,S]=0\ \forall n \\
&\Leftrightarrow \langle\psi, SA^n\phi\rangle = \langle\psi, A^nS\phi\rangle \\
&\Leftrightarrow \int_{\mathrm{spec}(A)} d\mu_{\psi,S\phi}(\lambda)\lambda^n = \int_{\mathrm{spec}(A)} d\mu_{S^*\psi,\phi}(\lambda)\lambda^n \\
&\Leftrightarrow \mu_{\psi,S\phi}(B) = \mu_{S^*\psi,\phi}(B)\ \forall B \text{ Borell} \\
&S\chi_B(A) = \chi_B(A)S\ \forall B \text{ Borell}
\end{aligned}$$

□

1.7 Entwicklung des Spektrums

Zuerst eine alternative Beschreibung des Spektrums

1.30 Satz. *Sei* $A = A^* \in \mathrm{BL}(\mathcal{H})$ *und* $P := \chi_{\cdot}(A)$. *Dann:*

a) $\lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow \exists$ *offene Umgebung.* $U \ni \lambda in\mathbb{R}$ *so dass* $P(U) = 0$

b) λ *ist ein Eigenwert von* $A \Leftrightarrow P(\{\lambda\}) \neq 0$ *(In diesem Fall, ist* $P(\{\lambda\})$ *die Projektion auf den zugehörigen Eigenraum.*

c) Isolierte Punkte (d.h. $\lambda \in \mathrm{spec}(A)$ *und* $\exists$ *offene Umgebung* U *von* λ *in* $\mathbb{R}$ *mit* $U \setminus \{\lambda\}$ *[*$\Leftrightarrow U \cap \mathrm{spec}(A) = \{\lambda\}$*]) in* $\mathrm{spec}(A)$ *sind Eigenwerte*

Beweis. a)" $\Rightarrow$ " Da $P(\rho(A)) = 0$ (Satz 1.26)

" $\Leftarrow$ " Sei U Umgebung von λ mit $P\left(()\, U\right) = 0$ (wir wollen zeigen, dass $(A-\lambda)$ invertierbar ist). Seien

$$f : t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{t-\lambda}, & t \in \mathrm{spec}(A) \cap U^c \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases} \qquad g : t \mapsto t - \lambda, t \in \mathrm{spec}(A)$$

f,g sind beschränkte Funktionen. Denn nach dem Funktionalkalkül gilt: $f(A)(A-\lambda) = (fg)(A) = \chi_{U^c}(A) = P(U^c) = \mathbb{1}$, weil $P(U) = 0$

b) folgt aus $\mathrm{ran}\, P(\{\lambda\}) = \ker(A-\lambda)$ (*)

" $\subset$ " Sei $\psi \in \mathrm{ran}\, P(\{\lambda\}) \Rightarrow P(\{\lambda\})\psi = \psi\ \Rightarrow \forall \phi \in \mathcal{H}$:
$\langle\phi, (A-\lambda)\psi\rangle = \langle\phi, (A-\lambda)P(\{\lambda\})\psi\rangle = \int d\mu_{\phi,\psi}(\eta(\eta-\lambda)\chi_{\{\lambda\}}(\eta) = 0$
$\Rightarrow (A-\lambda)\psi = 0 \Rightarrow \psi \in \ker(A) - \lambda$

" $\supset$ " Sei $\psi \in \ker(A-\lambda) \Rightarrow f(A)\psi = f(\lambda)\psi$ für alle Borelfunktionen f nach Satz 1.8. Insbesondere wähle $f = \chi_{\{\lambda\}}$ dann hat (**) die Form $P(\{\lambda\}) = \underbrace{\chi_(\{\lambda\})}_{1}\psi \Rightarrow \psi \in \mathrm{ran}(P(\{\lambda\}))$

c) Sei U offene Umgebung von λ so, dass $\underline{U \cap \mathrm{spec}(A) = \{\lambda\}} \overset{a)}{\Rightarrow} P(U \setminus \{\lambda\}) = 0$. Angenommen, dass $P(\{\lambda\}) = 0$ dann $P(U) = 0$ Wiederspruch da $U \nsubseteq \rho(A)$, so $P(\{\lambda\}) \neq 0$

□

Beweis von (*). "$\subseteq$" : Sei $\psi \in \operatorname{ran} P(\{\lambda\}) \Rightarrow P(\{\lambda\})\psi = \psi \Rightarrow \forall \psi \in \mathcal{H}$: $\langle \psi, (A-\lambda)\psi \rangle = \langle \psi, (A-\lambda) \prod \{\lambda\}\psi \rangle = \int_{\operatorname{spec}(A)} d\mu_{\phi,\psi}(\eta) \underbrace{(\eta-\lambda)\chi_{\{\lambda\}}(\eta)}_{=0\ \forall \eta \in \mathbb{R}} =$

$0 \Rightarrow \psi \in \ker(A-\lambda)$

"$\supseteq$" Sei $\psi \in \ker(A-\lambda) \Rightarrow f(A)\psi = f(\lambda)\psi\ \forall f \in C(\operatorname{spec}(A))$ nach Satz 1.8 c) Korollar 1.25 + Approximations

□

1.31 Korollar. $\operatorname{spec}(A)$ *ist die kleinste kompakte Menge in* $\mathbb{R}$ *mit* $P(\operatorname{spec}(A)) = \mathbb{1}$

Beweis. Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt, $P(K) = \mathbb{1}$ und $\lambda \notin K \Rightarrow \exists$ offene Umgebung U von λ mit $P(U) = 0 \overset{\text{Satz 1.30}}{\Longrightarrow} \lambda \in \rho(A)$, also $K^C \subseteq \rho(A) \Rightarrow K \supseteq \operatorname{spec}(A)$ □

1.32 Definition. Sei $A = A^* \in \mathrm{BL}(\mathcal{H})$ und P das zugehörige Spektralmaß $\{\lambda \in \operatorname{spec}(A) : \dim P(]\lambda-\epsilon, \lambda+\epsilon[) = \infty\ \forall \epsilon > 0\} =: \operatorname{spec}_{ess}(A)$ wesentliches Spektrum
$\operatorname{spec}_{disc}(A) := \operatorname{spec}(A) \backslash \operatorname{spec}_{ess}(A)$ diskretes Spektrum (disjunkte Zerlegung des Spektrums)

1.33 Satz. $\operatorname{spec}_{ess}(A)$ *ist abgeschlossen.*

Beweis. Sei $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{spec}_{ess}(A)$, $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda \in \mathbb{R}$
$\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : |\lambda_n - \lambda| < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow B_\epsilon(\lambda) \supseteq B_{\frac{\epsilon}{2}}(\lambda_n) \Rightarrow \dim P(B_\epsilon(\lambda)) \geq \dim P([) B_{\frac{\epsilon}{2}}(\lambda_n)] = \infty$ □

1.34 Beispiel. Sei $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine ONB in $\mathcal{H}$ und $A := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \psi_n \otimes \psi_n$ (kompakt, selbstadjungiert) $\Rightarrow \operatorname{spec}_{disc}(A) = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ nicht abgeschlossen. Häufungspunkt $0 \in \operatorname{spec}_{ess}(A)$
$\operatorname{spec}(A) = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

1.35 Satz. $\lambda \in \operatorname{spec}_{disc}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} (i) & \lambda \textit{ ist isolierter Eigenwert von } A \\ (ii) & \lambda \textit{ hat endliche Multiplizität, d.h.} \\ & \dim\{\psi \in \mathcal{H} : A\psi = \lambda\psi\} < \infty \end{cases}$

Beweis. übung! □

Wiederholung. *Lebesgue -Zerlegung eines $\sigma-$endlichen Borel-Maßes μ auf $\mathbb{R}$: (vgl. Kap. I.3.4.) $\exists_1$ Zerlegung* $\mu = \underbrace{\mu_{ac} + \mu_{sc}}_{\mu_c \text{stetiger Anteil}} \overset{+\mu_s c = \mu_s}{+} \overbrace{\mu_{pp}}^{\text{singulärer Anteil}}$ *in Borel-Maße, wobei $\mu_{ac} \ll$ Lebesgue, $\mu_s \perp$ Lebesgue und μ_{pp} ist der reine Punktanteil von μ. Insbesondere sind $\mu_{ac}, \mu_{sc}, \mu_{pp}$ paarweise singulär.*

1.36 Definition. Sei $A = A^* \in \mathrm{BL}(\mathcal{H})$.

$\mathcal{H}_{pp}(n) \equiv \mathcal{H}_{pp} := \overline{\operatorname{span}\{\psi \in \mathcal{H} : \exists \lambda \in \operatorname{spec}(A) \text{ mit } A\psi = \lambda\psi\}}$
reiner Punktspektralteilraum (bzgl A) ("pure point")

$\mathcal{H}_c(A) \equiv \mathcal{H}_c := \mathcal{H}_{pp}^\perp$ stetiger Spektralteilraum

$\mathcal{H}_{sc}(A) = \mathcal{H}_{sc} := \{\psi \in \mathcal{H}_c : \exists$ Leb.-Nullm. $N \subset \mathbb{R}$ mit $\chi_N(A)\psi = \psi (\Leftrightarrow \mu_\psi \perp \textit{Leb.})\}$
singulär-stetiger Spektralteilraum

1.37 Lemma. *Alle spektralen Teilräume aus Def. 1.36 sind abgeschlossene Unterräume von $\mathcal{H}$.*

Beweis. Dies ist nur für $\mathcal{H}_{sc}$ zu zeigen (Rest Klar). Seien $\psi_k \in \mathcal{H}_{sc},\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow$ $N_k \subset \mathbb{R}$ Lebesgue Nullmengen. mit $\chi_{N_k}(A)\psi_k = \psi_k \Rightarrow N := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$ ist Nullmenge
$\Rightarrow \chi_N(A)\psi_k = \psi_k \forall k \in \mathbb{N}$
$\chi_N(A)(\alpha\psi_1 + \beta\psi_k) = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$
d.h. $\alpha\psi_1 + \beta\psi_2 \in \mathcal{H}_{sc}$, also $\mathcal{H}_{sc}$ ist Unterraum.
Sei nun $\psi_k \xrightarrow{k\to\infty} \psi \in \mathcal{H}$
$\chi_N(A)\psi \overset{\text{Stetigk.}}{} \lim_{n\to\infty} \chi_N(A)\psi_k = \psi \Rightarrow \psi \in \mathcal{H}sc$ □

1.38 Satz. *Sei $A = A^* \in \mathrm{BL}(\mathcal{H})$ und für $\psi \in \mathcal{H}$ sei $\mu_\psi := \langle\psi, \chi_\cdot(A)\psi\rangle = \|\chi_\cdot(A)\psi\|^2$ das zugehörige Spektralmaß. Dann gilt für $0 \neq \psi \in \mathcal{H}$:*

(a) $\psi \in \mathcal{H}_{pp}(A) \Leftrightarrow \mu_\psi = \mu_{\psi,pp}$

(b) $\psi \in \mathcal{H}_t(A) \Leftrightarrow \mu_\psi = \mu_{\psi,c}\,(\Leftrightarrow \mu_\psi(\{\lambda\}) = 0\ \forall\lambda \in \mathbb{R})$

(c) $\psi \in \mathcal{H}_s(A) \Leftrightarrow \mu_\psi = \mu_{\psi,s}\,(\Leftrightarrow \mu_\psi \perp$ *Leb.)*

(d) $\psi \in \mathcal{H}_{ac}(A) \Leftrightarrow \mu_\psi = \mu_{\psi,ac}\,(\Leftrightarrow \mu_\psi \ll$ *Leb.)*

Weiter gilt:
$\mathcal{H}_sc \perp, \mathcal{H}_{pp},\ \mathcal{H}_{ac} \perp \mathcal{H}_{pp},\ \mathcal{H}_{sc} \perp \mathcal{H}_{ac}$
$\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_{pp} + \mathcal{H}_{sc},\ \mathcal{H}_c = \mathcal{H}_{sc} + \mathcal{H}_{ac}$
$\mathcal{H}_{pp} \otimes \mathcal{H}_{sc} \otimes \mathcal{H}_{ac} = \mathcal{H}$

Beweis. (a) "⇒" Sei $\psi \in \mathcal{H}_{pp} \Rightarrow \psi = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n\psi_n,\ c_n \in \mathbb{C}\,\forall n$
$\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 = \|\psi\|^2,\ \{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Orthonormalsystem von Eigenvektoren von $\mathcal{H}$. Sei $B := \{\lambda \in \mathbb{R} : A\psi_n = \lambda\psi_n$ für ein $n \in NN\}$

$$\Rightarrow \mu_\psi(B) = \sum_{\lambda\in B} \underbrace{\underbrace{\mu_\psi(\{\lambda\})}_{\langle\psi,\chi_{\{\lambda\}}(A)\psi\rangle}}_{\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}:\\ \lambda_n=\lambda}} c_n\lambda_n} = \underbrace{\sum_{\lambda\in B}\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ \lambda_n=\lambda}}}_{\sum_{n\in\mathbb{N}}} |c_n|^2$$

$\Rightarrow \mu_\psi(\mathbb{R} \setminus B) = \mu_\psi(\mathbb{R}) - \mu_\psi(B) = \|\psi\|^2 - \|\psi\|^2 = 0$

"⇐" Sei $\psi \in \mathcal{H}$ und $B \subseteq \mathbb{R}$ abzählbar mit $\mu_\psi(B) = \|\psi\|^2$. Sei $B = \{s_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ (s_n paarweise disjunkt).

$$\underbrace{\left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{s_n}(A)\psi\right\|^2}_{=:\|\phi\|^2} = {}^4 \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\|\chi_{s_n}(A)\psi\|^2}_{\mu_\psi(\{s_n\})} = \|\psi\|^2\ \ \|\psi - \phi\|^2 \overset{\phi\perp\psi-\phi}{=} \|\psi\|^2 -$$

$\|\phi\|^2 = 0 \Rightarrow \psi = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{\{s_n\}}(A)\psi$. Da $t\chi_{\{s_n\}}(t) = s_n\chi_{\{s_n\}}(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$ $\overset{\text{Funktionalkalkül}}{\Longrightarrow} A\chi_{\{s_n\}}(A)\psi = s_n\chi_{\{s_n\}}(A)\psi$ also $\chi_{s_n}(A)\psi \in \mathcal{H}_{pp}\ \forall n \Rightarrow$ $\psi \in \mathcal{H}_{pp}$

(b) Übung !

[4] Pythagoras, Aufgabe ?

(c) “$\Rightarrow$“ Sei $\psi \in \mathcal{H}_s := \mathcal{H}_{sc} \otimes \mathcal{H}_{pp} \Rightarrow \psi = \underbrace{\psi_{sc}}_{\in \mathcal{H}_{sc}} + \underbrace{\psi_{pp}}_{\in \mathcal{H}_{pp}}$

- $\exists B \subset \mathbb{R}$ abzählbar mit $\chi_B(A)\psi_{pp} = \psi_{pp}$
- $\exists N \subset \mathbb{R}$ Lebesgue Nullmenge mit $\chi_N(A)\psi_{sc} = \psi_{sc}$

$$\Rightarrow \chi_{B\cup N}(A)\psi = \underbrace{\chi_{B\cup N}(A)\psi_{sc}}_{\underbrace{\chi_B(A)\psi_{sc}}_{=\psi_{sc}} + \underbrace{\chi_{(B\cup N)\setminus B}(A) \underbrace{\psi_{sc}}_{\chi_B(A)\psi_{sc}}}_{=0}} + \chi_{B\cup N}(A)\psi_{pp} =$$

$\psi_{sc} + \psi_{pp} = \psi$

μ_ψ ist auf Lebesgue-Nullmenge $B \cup N$ konzentriert also $\perp$ Lebesgue.

“$\Leftarrow$“ Sei $\psi \in \mathcal{H}$ mit $\mu_\psi \perp$ Lebesgue $\Rightarrow \exists$ Lebesgue Nullmenge $N \subset \mathbb{R}$: $\chi_N(A)\psi = \psi$. Da $\mu_\psi(\mathbb{R}) < \infty$ existiert genau eine, höchstens abzählbare Menge $B = \{s_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ mit $\mu_\psi(\{s_n\}) > 0$ und $\mu_\psi(\{\lambda\}) = 0\ \forall \lambda \notin B$. Sei $\psi_{pp} := \chi_B(A)\psi$, *d.h.*$\psi_{pp} \in \mathcal{H}_{pp}$. Zeige $\psi_{sc} := \psi - \psi_{pp} \in \mathcal{H}_{sc} = \mathcal{H}_s \cap \mathcal{H}_c$. Dies gilt, da:

- Sei $\psi \in \mathcal{H}$ mit $A\psi = \lambda\psi \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \langle \psi_{sc}, \phi \rangle = \langle \psi - \psi_{pp}, \phi \rangle &= \left\langle \psi - \chi_B(A)\psi, \chi_{\{\lambda\}}(A)\phi \right\rangle \\ &< (\chi_{\{\lambda\}}(A) - \underbrace{\chi_{\{\lambda\}}(A)\chi_{\{\lambda\}}(A)}_{\chi_{\{\lambda\}}(A)})\psi, \phi >= 0 \end{aligned}$$

  also $\psi_{sc} \perp \mathcal{H}_{pp}$, d.h. $\psi_{sc} \in \mathcal{H}_{pp}^\perp = \mathcal{H}_c$
- für obige Nullmenge N gilt:

$$\chi_N(A)\psi_{sc} = \chi_N(A)\left(\psi - \chi_B(A)\psi\right) = (\mathbb{1} - \chi_B(A))\underbrace{\chi_N(A)\psi}_{\psi n.V.} = \psi_{sc}$$

  $\Rightarrow \psi_{sc} \in \mathcal{H}_s$

(d) $\mathcal{H}_{ac} = \mathcal{H}_{sc}^\perp \cap \underbrace{\mathcal{H}_c}_{\mathcal{H}_pp^\perp} = (\mathcal{H}_{sc} \otimes \mathcal{H}_{pp})^\perp = \mathcal{H}_s^\perp$

”$\Rightarrow$” Sei $\psi \in \mathcal{H}_{ac}$, sei N eine Lebesgue Nullmenge.
$\Rightarrow \mu_\psi(N) =< \underbrace{\psi}_{\in \mathcal{H}_s^\perp}, \underbrace{\chi_N(A)\psi}_{\in \mathcal{H}_s} >= 0 \ \Rightarrow \mu_\psi \ll$ Lebesgue

”$\Leftarrow$” $\forall \phi \in \mathcal{H}_s\ \exists$ Nullmenge $N_\phi : \phi = \chi_{N_\phi}(A)\phi$. Sei nun $\psi \in \mathcal{H}$ mit $\mu_\psi \ll$ Leb
$\Rightarrow | < \psi, \underbrace{\phi}_{\chi_{N_\psi}(A)\phi} | = \left|\left\langle \chi_{N_\phi}(A)\psi, \phi \right\rangle\right| \overset{\text{C.S.}}{\leq} (\underbrace{\mu_\psi(N_\psi)}_{0})^{\frac{1}{2}} \|\psi\| = 0$
$\Rightarrow \psi \in \mathcal{H}_s^\perp$

Rest: Übung!

□

Bemerkung. Sei $P = PP^*$ ein Orthogonalprojektor und $\|P\psi\| = \|\psi\|$ für ein $\psi \in \mathcal{H} \Rightarrow P\psi = \psi$

Beweis. $\|P\psi - \psi\|^2 = \|P\psi\|^2 + \|\psi\|^2 - 2\underbrace{\langle P\psi, \psi\rangle}_{\|P\psi\|^2} = 0$ □

1.39 Definition. Für $A = A^* \in \mathrm{BL}(\mathcal{H})$ und $x \in \{pp, sc, ac, s, c\}$ sei P_x der Orthogonalprojektor $\mathcal{H} \to \mathcal{H}_x(A)$

1.40 Bemerkung. $P_{pp}P_{sc} = P_{pp}P_{ac} = P_{ac}P_{sc} = 0$, $P_s = P_{pp} + P_{sc}, P_{sc} + P_{ac}$, $P_{pp} + P_{sc} + P_{ac} = \mathbb{1}$

1.41 Satz. *Sei $A = A^* \in \mathrm{BL}(\mathcal{H})$. Die Projektoren $P_x, x \in \{pp, sc, ac, s, c\}$, kommutieren untereinander und mit A, insbesondere reduziert P_x den Operator A, $\forall x$, d.h. $A = P_xAP_x + P_x^\perp AP_x^\perp$ mit $P_x^\perp = \mathbb{1} - P_x$*

$$A' = \begin{array}{c|c} A|_{\mathcal{H}_x} & 0 \\ 0 & A|_{\mathcal{H}_x^\perp} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{H}_x\ \mathcal{H}_x^\perp & \\ A = & A' & \mathcal{H}_x\mathcal{H}_x^\perp \end{array}$$

Unmittelbare Konsequenz:

1.42 Korollar. $A = P_{pp}AP_{pp} + P_{sc}AP_{sc} + P_{ac}AP_{ac}$

Beweis von Satz 1.41. Kommutieren der P_x untereinander folgt aus Bemerkung 1.40. Falls $[P_x, A] = 0$ (siehe unten), dann $[P_x^\perp, A] = 0$ und $A = A(P_x + P_x^\perp) = \underbrace{AP_x}_{P_xA} P_x + P_x^\perp AP_x^\perp$

Wir zeigen: $[P_x, \chi_B(A)] = 0$; $\forall B \in \mathcal{B}$ $\left(\overset{Kor.1.29}{\Longleftrightarrow} [P_x, A] = 0\right)$

x=pp $\forall\psi \in \mathcal{H}_p p\exists N \subset \mathbb{R}$ abzählbar mit $\chi_N(A)\psi = \psi$[5]
$\Rightarrow \forall B \in \mathcal{B} : \chi_B(A)\psi = \chi_B(A)\chi_N(A)\psi = \chi_N(A)\chi_B(A)\psi \in HH_{pp}$[5]
$\Rightarrow \forall\phi \in \mathcal{H} : chi_B(A)P_{pp}\phi = P_{pp}\chi_B(A)P_{pp}\phi$
$\Rightarrow \chi_B(A)P_{pp} = P_{pp}\chi_B(A)P_{pp} \overset{\text{adjungieren}}{=} P_{pp}\chi_B(A)$

x=s analog, mit N Nullmenge statt abzählbar. Die Fälle $x = pp$ und $x = ss$ und Bemerkung 1.40 ergeben die restlichen Fälle für x.

□

Erinnerung. *$\mathcal{H}_x$ ist Hilbertraum $\forall x$ (Lemma 1.37)*

1.43 Definition.
- Für $x \in \{pp, sc, ac, c, s\}$ ist $A_:\mathcal{H}_x \to \mathcal{H}_x, \psi \mapsto A\psi$ wohldef. und selbstadjungiert (wegen $A\psi = AP_x\psi \overset{\text{Satz 1.41}}{=} P_xAP_x\psi \in \mathcal{H}_x$)
- $\mathrm{spec}_x(A) := \mathrm{spec}(A_x)$ heißt das x-Spektrum von A

Notation. A hat in $I \subseteq \mathbb{R}$ reines x-Spektrum $:\Leftrightarrow \mathrm{spec}_x(A) \cap I = \mathrm{spec}(A) \cap I$. Per Def. gilt:

- A_x hat reines x-Spektrum
- $\mathcal{H}_x = \{0\} \Rightarrow \mathrm{spec}_x(A) = \emptyset$

[5] vgl. Beweis von Satz 1.38(a)

1.44 Lemma. *Sei $A = A^* \in \mathrm{BL}(\mathcal{H})$. Dann gilt*

i) $\mathrm{spec}_x(A)$ *ist kompakt in* $\mathbb{R}\ \forall x$

ii) $\mathrm{spec}(A) = \mathrm{spec}_{pp}(A) \cup \mathrm{spec}_{sc}(A) \cup \mathrm{spec}_{ac}(A) = \mathrm{spec}_{pp}(A) \cup \mathrm{spec}_c(A) = \mathrm{spec}_s(A) \cup \mathrm{spec}_{ac}(A)$

iii) $\mathrm{spec}_{pp}(A) = \overline{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \textit{ ist Eigenwert von } A}$

iv) $\mathrm{spec}_{ac}(A)$ *hat positives Lebesgue-Maß oder ist* $\emptyset$

v) $\mathrm{spec}_{sc}(A)$ *ist überabzählbar oder* $\emptyset$

Warnung. • *Die Vereinigungen in 1.44(ii) sind nicht notwendigerweise disjunkt!*

• $\mathrm{spec}_{sc/pp}(A)$ *kann positives Lebesgue-Maß haben!*

Beweis von Lemma 1.44. i) klar, da $A_x = A_x^* \in \mathrm{BL}(\mathcal{H})$

ii) Sei P Orthogonalprojektor in $\mathcal{H}$, $P^\perp := \mathbb{1} - P$ und $[P, A] = 0$
$\Rightarrow A - z = P(PAP - z)P + P^\perp(P^\perp A P^\perp - z)P^\perp = (A_P - z) \oplus (A_{P^\perp} - z) = \left(\begin{array}{c|c} A_p - z & 0 \\ 0 & A_{P^\perp} - z \end{array}\right)$ mit $A_{P^{(\perp)}} : P^{(\perp)}\mathcal{H} \to P^{(\perp)}\mathcal{H}, \psi \mapsto A\psi = P^{(\perp)}AP^{(\perp)}\psi$
$\Rightarrow z \in \rho(A) \Leftrightarrow z \in \rho(A_P) \cap \rho(A_{P^\perp})$
$\Rightarrow \mathrm{spec}(A) = \mathrm{spec}(A_P) \cup \mathrm{spec}(A_{P^\perp})$

iii) "$\supseteq$" sei λ Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor $\psi \in \mathcal{H}_{pp} \Rightarrow A_{pp}\psi = \lambda\psi \Rightarrow \lambda \in \mathrm{spec}(A_{pp}) = \mathrm{spec}_{pp}(A) \Rightarrow \overline{\{\text{Eigenwerte}\}} \subseteq \overline{\mathrm{spec}_{pp}(A)} = \mathrm{spec}_{pp}(A)$

"$\subseteq$" Sei $E \in \mathrm{spec}_{pp}(A)$
<u>Annahme:</u> $\exists \epsilon > 0 : \mathrm{dist}(E, \{\text{Eigenwerte}\}) > \epsilon$
Weyl-Kriterium $\Rightarrow \exists \psi \in \mathcal{H}_{pp}, \|\psi\| = 1 : \| \underbrace{(A_{pp} - E)\psi}_{(A-E)\psi} \| < \epsilon$
Def. von $\mathcal{H}_{pp} \exists \gamma_n \in \mathbb{C}$, Orthonormalfolge $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Eigenvektoren:

$$\psi = \sum_n \gamma_n \psi_n, \quad \sum_n |\gamma_n|^2 = 1$$

$$\Rightarrow \|(A - E)\psi\|^2 = \|\textstyle\sum_n \gamma_n(\lambda_n - E)\psi_n\|^2 = \sum_n |\gamma_n|^2 |\lambda_n - E|^2 \geq \epsilon^2$$

iv) <u>Annahme:</u> $\mathrm{spec}_{ac}(A) = \mathrm{spec}(A_{ac}) =: N$ ist Lebesgue Nullmenge. $\Rightarrow \chi_{\mathbb{R}\setminus N}(A_{ac}) = 0$ Sei $\psi \in \mathcal{H}_{ac}$
$\Rightarrow \mu_\psi(\mathbb{R} \setminus N) =< \psi, \underbrace{\chi_{\mathbb{R}\setminus N}(A)\psi}_{\chi_{\mathbb{R}\setminus N}(A_{ac})\psi} >= 0 \Rightarrow \mu_\psi \perp$ Lebesgue
$\Rightarrow \mathcal{H}_{ac} = \{0\} \Rightarrow \mathrm{spec}_{A_{ac}} = \emptyset$

v) analog (iv)

□

1.45 Beispiel. (i) [Bsc 1.28 iii)] $\mathcal{H} = L^2([0,1])$, $(A\phi)(x) := x\phi(x)$, d.h $A = M_?$ $\Rightarrow \mu_\psi(B) := \langle \psi, \chi_B(A)\psi \rangle = \int_{B\cap[0,1]} dx\, |\psi(x)|^2\ \forall B \subseteq \mathbb{R} Borel,\ \forall \psi \in \mathcal{H}$ also $\mu_\psi = \mu_{\psi,ac} \Rightarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac}$, d.h. $\operatorname{spec}(A) = \operatorname{spec}_{ac}(A) = {}^6[0,1]$ reines ac-Spektrum

(ii) $\binom{\phi}{\gamma} = \Psi \in \mathcal{H} = L^2([0,1]) \oplus \mathbb{C}$, $\phi \in L^2([0,1]), \gamma \in \mathbb{C}$
$\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle_{\mathcal{H}} := \langle \phi_1, \phi_2 \rangle_{L^2} + \bar{\gamma}_1\gamma^2$
$\mathcal{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \binom{\phi}{\gamma} \mapsto \binom{A\phi}{a\gamma}$, $a \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \mathcal{H}_{ac}(\mathcal{A}) = \left\{\binom{\phi}{0} : \phi \in L^2([0,1])\right\}$; $\operatorname{spec}_{ac}(\mathcal{A}) = [0,1]$
$\mathcal{H}_{pp}(\mathcal{A}) = \left\{\binom{0}{\gamma} : \gamma \in \mathbb{C}\right\}$; $\operatorname{spec}_{pp}(\mathcal{A}) = \{a\}$
$\mathcal{H}_{ac}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{H}_{pp}(\mathcal{A}) = \mathcal{H} \Rightarrow \operatorname{spec}_{sc}(\mathcal{A}) = \emptyset$ aber ac- und pp-Spektrum i.a. nicht disjunkt!

(iii) $\mathcal{H}$ separabel mit ONB $\{\psi_j\})j \in \mathbb{N}$
Sei $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0,1]$ eine Abzählung der rationalen Zahlen in [0,1].

$$\begin{aligned} A &:= \sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha(j)\psi_j \oplus \psi_j \quad (\textstyle\sum \text{ konvergiert stark}) \\ &= \int_{[0,1]} P(d\lambda)\lambda \text{ mit Spektralschar} \end{aligned}$$

$P(B) = \chi_B(A) = \sum_{\substack{j\in\mathbb{N} \\ \alpha(j)\in B}} \psi_j \otimes \psi_j$, $B \subseteq \mathbb{R} Borel$, da $A\psi_n = \alpha(n)\psi_n\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathcal{H}_{pp} \supseteq \overline{\operatorname{span}\{\psi_n : n \in \mathbb{N}\}} = \mathcal{H}$, also $\mathcal{H}_{pp} = \mathcal{H}$ und $\operatorname{spec}(A) = \operatorname{spec}_{pp}(A) = \overline{\mathbb{Q} \cap [0,1]} = [0,1]$

1.8 Spektralsatz in Multiplikationsoperatorform

Bemerkung. Ziel: analoge Darstellung zu $UAU^* = diag(\dots)$ für Matrizen

1.46 Definition. Sei $A = A^* \in \mathrm{BL}(\mathcal{H})$ ψ heißt zyklischer Vektor genau dann, wenn $\overline{\operatorname{span}\{A^*\psi : n \in \mathbb{N}_0\}} = \mathcal{H}$

Bemerkung.
- muss nicht existieren ($A = \mathbb{1}$)
- falls A nur pp - Spektrum hat, gilt: zykl. Vektor existiert $\Leftrightarrow$ kein Eigenwert ist entartet.

1.47 Lemma. *Sei $A = A^* \in \mathrm{BL}(\mathcal{H})$ und es gebe zyklischen Vektor ψ zu A. Sei $\mu_\psi := \langle \psi, \chi_\cdot(A)\psi \rangle$. Dann $\exists$ unitärer Operator $U : \mathcal{H} \to L^2(\operatorname{spec}(A), \mu_\psi) \equiv L^2$, so dass $UAU^{-1} = M_{\mathrm{id}}$ auf L^2, d.h. $\left((UAU^{-1})\phi\right)(\lambda) = \lambda\phi(\lambda)$ für μ_ψ-f.a. $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$.*

1.48 Bemerkung. Es gilt auch die Umkehrung, s. Übung!

Beweis. Sei $V_0 : C(\operatorname{spec}(A)) \to \mathcal{H}, f \mapsto f(A)\psi$

- linear

[6] $'' \subseteq''\ \chi_{[0,1]}(A) = \mathbb{1}$, „ $\supseteq$ “ Weyl Kriterium

- isometrisch bzgl. L^2- Norm und Norm in $\mathcal{H}$

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathrm{spec}(A)} d\mu_\psi(\lambda) \underbrace{|f(\lambda)|^2}_{|f|^2(\lambda)} =^7 < \psi, \underbrace{|f|^2(A)\psi}_{f(A)^* f(A)} >= \|f(A)\|_{\mathcal{H}}^2$$

Da μ_ψ ein reguläres Maß auf $\mathrm{spec}(A) \Rightarrow C(\mathrm{spec}(A))$ dicht in L^2. $\Rightarrow^8 \exists_1$ linearisometrische Fortsetzung $V : L^2 \to \mathcal{H}$ mit $V|_{C(\mathrm{spec}(A))} = V_0$. Außerdem $\mathrm{ran}(V) \supseteq \mathrm{span}\{\underbrace{A^n\psi}_{=V(\mathrm{id}^n \mathbb{1})} : n \in \mathbb{N}_0\}$ dicht in $\mathcal{H}$ nach Vereinbarung (zyklisch).

$\Rightarrow \overline{\mathrm{ran}\, V} = \mathrm{ran}\, V = \mathcal{H} \Rightarrow$ V ist unitär. Weiter ist für $\phi \in C(\mathrm{spec}(A))$
$A \underbrace{V\phi}_{\phi(A)\psi} = \underbrace{A\phi(A)}_{(\mathrm{id}\,\phi)(A)} \psi = V(\mathrm{id}\,\phi) \Rightarrow (V^{-1}AV\phi) = \mathrm{id}\,\phi = M_{\mathrm{id}}\phi \overset{\text{Dichtheit}}{\Rightarrow} V^{-1}AV =$ M_{id} auf L^2 setze $U = V^{-1}$ Allgemeiner Fall durch Reduktion auf Obiges. $\square$

1.49 Satz (Spektralsatz in Multiplikationsoperatorform)**.** *Sei $A = A^* \in \mathrm{BL}(\mathcal{H})$. Dann gibts einen Maßraum $(\Lambda, \mathcal{L}, \mu)$, eine Funktion $\sigma : \Lambda \to \mathrm{spec}(A)$ und einen unitären Operator $U : \mathcal{H} \to L^2(\Lambda, \mu)$, so dass $UAU^{-1} = M_\sigma$ auf $L^2(\Lambda, \mu)$, d.h. $\left(UAU^{-1}\phi\right)(\tilde{\lambda}) = \sigma(\tilde{\lambda})\ \forall \phi \in L^2(\Lambda, \mu)$ und $\mu-$ f. a. $\lambda \in \Lambda$.*

1.50 Lemma. *Sei $\mathcal{H}$ separabel und $A = A^* \in \mathrm{BL}(\mathcal{H})$. Dann $\exists$ abzählbare Familie $(\mathcal{H}_l)_{l\in L}$ von paarweise orthogonalen Unterräumen von $\mathcal{H}$ mit*

- $\mathcal{H} = \bigotimes_{l\in L} \mathcal{H}_l$
- $A\mathcal{H}_l \subseteq \mathcal{H}_l;\ \forall l \in L$
- *$A|\mathcal{H}_l$ besitzt zyklischen Vektor $\psi_l \in \mathcal{H}_l\ \forall l \in L$*

1.51 Korollar. *Sei $\mathcal{H}$ separabel, $A = A^* \in \mathrm{BL}(\mathcal{H})$. Dann $\exists$ endliche Borel-Maße μ_l auf $\mathrm{spec}(A)$, $l \in L$, und $U_l : \mathcal{H}_l \to L^2(\mathrm{spec}(A), \mu_l)$, so dass $U_l A U_l^{-1} = M_{\mathrm{id}}$ auf $L^2(\mathrm{spec}(A), \mu_l)\ \forall l \in L$. Hierbei ist $\mu_l = \langle \psi_l, \chi_\cdot(A|_{\mathcal{H}})\psi_l \rangle$*

Beweis von Satz 1.50. [nur für $\mathcal{H}$ separabel] Sei ψ_l der zyklische Vektor von $A|_{\mathcal{H}_l}$ in $\mathcal{H}_l$ gemäß Lemma 1.51 und μ_l wie in Kor. 1.52. Wähle $\|\psi_l\|$ so, dass $\sum_{l\in L} \mu_l(\mathbb{R}) < \infty$ und $L \subseteq \mathbb{N}$. Setze $\Lambda := (\mathrm{spec}(A) \times \{l\}) \subset \mathbb{R}^2$.
Wähle $\mathcal{L} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \cap \Lambda$ (≡. 1 dim. Borel-σ-Algebra) $\mu(K) = \sum_{l\in L} \mu_l(K \cap (\mathrm{spec}(A) \times \{l\})$
$\tilde{\lambda} \in \Lambda \Leftrightarrow \tilde{\lambda} = (\lambda, l); \lambda \in \mathrm{spec}(A), l \in L$

$$\begin{aligned} U : \mathcal{H} \equiv \bigotimes_{l\in L} \mathcal{H} &\to \bigotimes_{l\in L} L^2(\mathrm{spec}(A), \mu_l) \equiv L^2(\Lambda, \mu) \equiv L^2(\Lambda, \mu) \\ \Psi \equiv (\ \ldots \psi_l \ldots\ )_{l\in L} &\mapsto (\ \ldots U_l\psi_l \ldots\ )_{l\in L} \eqqcolon H\psi \end{aligned}$$

$\Phi \in L^2(\Lambda, \mu) \quad \Phi((\lambda, l)) := \phi_l(\lambda) \in L^2(\mathrm{spec}(A, \mu_l)$
Somit gilt: $(UAU^{-1}\Phi)(\lambda, l) = \lambda \underbrace{\phi_l(\lambda)}_{\Phi(\lambda,l} = \sigma((\lambda, l))\Phi(\lambda, l)$ $\square$

Beweis Lemma 1.51. Mit Zornschem Lemma! Sei M die Menge aller abzählbaren paarweise orthogonalen Unterräumen von $\mathcal{H}$. ($\mathcal{F} = (\mathcal{H}_l)_l$) mit:

---

[7] Stetiger Funktionalkalkül
[8] Fortsetzungsatz

- $A\mathcal{H}_l \subseteq \mathcal{H}_l \; \forall l$
- $A|_{\mathcal{H}_l}$ hat zyklischen Vektor. Es gilt: M$\neq \emptyset$ (da die Familie $\mathcal{F} = \{0\} \in M$)
- M ist teilweise geordnet:
  $(\mathcal{H}_l) = \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_2 \Leftrightarrow \forall l \in L_1 : \mathcal{H}_l^{(i)} \in \mathcal{F}^2$
- jede totalgeordnete Teilmenge von M besitzt obere Schranke, denn :
  Sei $K \subset M$ total geordnet, dann ist $\tilde{\mathcal{F}} = \bigcup_{\mathcal{F}\in\mathbb{K}}$ obere Schranken für K in $M. \overset{\text{Zorn}}{\Rightarrow} \exists$ maximale Familie $\mathcal{F}_{\max}$ in M, außerdem gilt $\{0\} \in \mathcal{F}_{\max}$

[Behauptung]: Sei $\mathcal{F}_{\max} = \left(\mathcal{H}_l^{(m)}\right)$ dann ist $\bigotimes_l \mathcal{H}_l^{(m)} = \mathcal{H}$ □

1.9 Spektralsatz für normale Operatoren

1.52 Satz. *Sei $A \in \mathrm{BL}(\mathcal{H})$ normal (d.h. $[A, A^*] = 0$). Dann $\exists_1$ Spektralmaß P auf $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ mit $P\left(\mathrm{spec}(A)\right) = \mathbb{1}$ so dass $A = \int_{\mathrm{spec}(A)} dP(z)z$. Weiterhin für $f : \mathrm{spec}(A) \to \mathbb{C}$, messbar und beschränkt $f \mapsto \int_{\mathrm{spec}(A)} dP(z)f(z)$ dem eindeutig bestimmten messbaren Funktionalkalkül zu A. Schließlich $\exists$ Maßraum (Λ, μ), $U : \mathcal{H} \to L^2(\Lambda, \mu)$ unitär und $\sigma : \Lambda \to \mathrm{spec}(A)$, so dass $UAU^{-1} = M_\sigma$ auf $L^2(\Lambda, \mu)$*

Beweisidee. Sei $A_1 := \frac{A+A^*}{2}, A_2 := \frac{1}{2i}(A - A^*) \Rightarrow$

(i) $A_j = A_j^*$ für $j = 1, 2$

(ii) A normal $\Rightarrow [A_1, A_2] = 0$

(i) $\Rightarrow$ Sie P_j die Spektralschar von A_j auf $B_{\mathbb{R}}$ (Selbstadj.)

(ii) Kor. 1.29 $\Rightarrow [P_1(B_1), P_2(B_2)] = 0; \; \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}_R R$ Für $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ist $R := B_1 \times iB_2 := \{z \in \mathbb{C} : \Re Z \in B_1, \Im z \in B_2\}$ ein “Rechteck” in $\mathbb{C}$ und setze $P(R) := P_1(B_2)P_2(B_2) \Rightarrow P(R) = P(R)^*P(R)$ (Orthogonalprojektor in $\mathcal{H}$, da P_1, P_2 kommutieren). P kann zu einem Spektralmaß auf $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ fortgesetzt werden (vgl. Maßtheorie, da Rechtecke $B_{\mathbb{C}}$ erzeugen). Man wiederhole folgende Beweise für normale Operatoren (analog zum selbstadjungierten Fall)

- Existenz und Eindeutigkeit des stetigen und messbaren Funktionalkalküls, der von P realisiert wird.
- $P\left(()\,\mathrm{spec}(A)\right) = 1$
- Multiplikationsoperatorform

□

1.53 Beispiel. Für $U \in \mathrm{BL}(\mathcal{H})$ unitär gilt Satz 1.53 mit $\mathrm{spec}(U) \subseteq \Pi := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, d.h. P ist auf Π konzentriert

Beweis. “$\subseteq$“ i) $0 \in \rho(U)$, da U bijektiv

ii) $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > 1 \Rightarrow \lambda \in \rho(U)$, da $\|U\| = 1$ wegen Isometrie

iii) $U - z = \underbrace{U}_{\text{bij.}}\underbrace{(-z)}_{\neq 0}\underbrace{\left(U^* - \frac{1}{z}\right)}_{\text{bij. nach }(ii)}$ für $0 < |z| < 1 \Rightarrow z \in \rho(U)$

$\square$

Kapitel 2

Fourier-Trafo und Distributionen

Definition.
- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gebiet
- für $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ ist $|\alpha| := \sum_{j=1}^d |\alpha_j|$
- für $x \in \mathbb{R}^d$ ist $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_d^{\alpha_d}$
- $D^\alpha := \frac{\delta^{|\alpha|}}{\delta x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \delta x_d^{\alpha_d}}$

2.1 Räume von Testfunktionen

Ziel. *Topologisierung von Räumen "braver" Funktionen*

2.1 Definition (Schwartz-Raum)**.**

$$\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \left\{ \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| x^\alpha (D^\beta \phi)(x) \right| < \infty \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d \right\}$$

Funktionen und Ableitungen fallen im Unendlichen schneller als jede Potenz ab.

2.2 Beispiel. $C_C^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), x \mapsto e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

2.3 Definition (Definition und Lemma)**.** a) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ ist $p_{\alpha,\beta} : \mathcal{S} \to [0, \infty[$, $\phi \mapsto \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| x^\alpha (D^\beta \phi)(x) \right|$ eine Halbnorm auf $\mathcal{S}$

b) Die Familie $\{p_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^d}$ von Halbnormen generiert mittels $\mathcal{U}_{\alpha,\beta,r}(\phi) := \{\phi' \in \mathcal{S} : p_{\alpha,\beta}(\phi - \phi') < r\}$ $(r > 0)$ eine Umgebungs-Subbasis einer lokal-konvexen Topologie auf $\mathcal{S}$

c) Diese lokal konvexe Topologie ist metrisierbar und Hausdorffsch.

Anmerkungen zum Beweis. a) klar!

b) und c) vgl. Definition I.4.26 ff

- Haussdorfsch, da $\{p_{\alpha,\beta}\}$ separierend, d.h. zu $0 \neq \phi \in \mathcal{S}\ \exists \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d : p_{\alpha,\beta}(\phi) \neq 0$

- metrisierbar, da abzählbare Familien von Umgebungen ausreichend (wähle $r = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$) ist und daher die Topologie das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.
  Eine mögliche Metrik: Sei $\gamma_{\alpha,\beta} \in [0,1[$ mit $\sum\limits_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^d} \gamma_{\alpha,\beta} = 1$, & setze

$$d(\phi, \phi^{'}) := \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^d} \gamma_{\alpha,\beta} \frac{p_{\alpha,\beta}(\phi - \phi^{'})}{1 + p_{\alpha,\beta}(\phi - \phi')}$$

□

2.4 Definition. Sei V ein lokalkonvexer Vektorraum, $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine die Topologie erzeugende (abzählbare!) Familie von Halbnormen. V heißt vollstängig $\Leftrightarrow$ Falls $(\phi_k)_k \subset V$ mit $\forall \epsilon > 0 \, \forall n \in \mathbb{N} \, \exists K \equiv K(\epsilon, n) \, \forall k, k^{'} \geq K : p_n(\phi_k - \phi_{k'}) < \epsilon$ dann $\exists \phi \in V$ mit $\lim_{k \to \infty} p_n(\phi_k - \phi) = 0 \, \forall n \in \mathbb{N}$

2.5 Bemerkung.
- Ist wohldefiniert, da unabhängig von gewählter Familie von Halbnormen
- Im allgemeinen Fall, das heißt, wenn die Topologie nicht das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt (z.b. überabzählbare Familie von Halbnormen), so muss man die Folgen durch Netze ersetzen.

2.6 Satz. *a) $\mathcal{S}$ ist ein Fréchetraum, d.h. ein vollständiger, metrisierbarer, lokalkonvexer Vektorraum.*

b) $\phi_k \xrightarrow{k \to \infty} \phi$ in $\mathcal{S} \Rightarrow p_{\alpha,\beta}(\phi_k - \phi) \xrightarrow{k \to \infty} 0 \, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^{'}$

Beweis. a) aus Vollständigkeit der gleichmäßigen Konvergenz (vgl. Reed/Simon Theorem V.9)

b) aus Definition der lokal-konvexen Topologie

□

2.7 Satz. *(a) Die Familie von Halbnormen $\{\tilde{p}_{j,m}\}_{j,m \in \mathbb{N}_0}$, definiert, duch*

$$p_{j,m}(\phi) := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left(\left(1 + |x|^2\right)^{\frac{j}{2}} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} |(D^\alpha \phi)(x)|) \text{ für } \phi \in \mathcal{S} \right)$$

erzeugt dieselbe, lokal-konvexe Topologie wie $\{p_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^d}$

(b) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^P(\mathbb{R}^d)$; $\forall p \in [1, \infty]$ und ist dicht $\forall p \in [1, \infty[$ (Dichtheit wegen Bsp. 2.2)

Beweisidee: a) Zeige:

$$\lim_{n \to \infty} p_{\alpha,\beta}(\phi_n) = 0 \, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \tilde{p}_{j,m}(\phi_k) = 0 \, \forall j, m \in \mathbb{N}_0$$

(genügt, da beide Topologien metrisierbar sind.)

b) aus $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset$ [1]$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$ klar, da $\phi \in \mathcal{S} \in L^\infty(K) \, \forall K$ kompakt und $\lim\limits_{|x| \to \infty} \phi(x) = 0$

□

[1] dicht $\forall p \in [1, \infty[$ (Satz I, 3.45)

Nun zur Topologisierung von $C_c^\infty(\Omega)$. Als Vorbereitung dafür dient die von geeigneten Teilräumen, analog zu $\mathcal{S}$.

Zum Induktiven Limes

$A \subset V$, V Vektorraum

- *konvex:* $\forall x, y \in A \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in A \; \forall \lambda \in [0,1]$
- *absorbierend:* $\forall x \in V \; \exists \lambda \in \mathbb{C} : x \in \lambda A$
- *balanciert:* $\forall x \in A \; \forall |\lambda| < 1 : \lambda x \in A$

Satz. *a) Sei p eine Halbnorm $\Rightarrow U_{p,r} := \{\phi \in V : p(\phi) < r\}$ ist konvex, absorbierend und balanciert $\forall r > 0$*

b) Sei A konvex, absorbierend und balanciert $\Rightarrow A \supseteq U_{p_A,1}$

Definition. Minkowski-Funktional $p_A(\phi) := \inf\{\lambda > 0 : \phi \in \lambda A\}$

$C_C^\infty(\Omega) = \bigcup_{K \subset \Omega \; kompakt} \mathcal{D}_K(\Omega)$
$A \subset C_C^\infty(\Omega)$ ist offene Nullumgebung in induktiver Limestopologie $\tau_{i,l} \Leftrightarrow A$ absorbierend, konvex und $\forall k \subset \Omega : A \cap \mathcal{D}_K(\Omega)$ ist offene Nullumgebung in $\mathcal{D}_K(\Omega)$

2.8 Satz. *Für $K \subset \Omega$ kompakt sei $\mathcal{D}_k(\Omega) := \{\phi \in C_C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp}\phi \subseteq K\}$. Die Familie von Halbnormen $\{\hat{p}_{k,\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d}$, $\hat{p}_{k,\alpha}(\phi) := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |(D^\alpha \phi)(x)|$, $\phi \in C_C^\infty(\Omega)$ erzeugt eine vollständige, metrisierbare, lokalkonvexe, hausdorffsche Topologie auf $\mathcal{D}_K(\Omega)$ Es gilt:*

$$\lim_{k\to\infty} \phi_k = \phi \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} p_{k,\alpha}(\phi_k - \phi) = 0; \; \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d$$

(gleichmäßige Konvergenz aller Ableitungen auf K)

2.9 Bemerkung.

1. Die von $\{p_{k,\alpha}\}_{\substack{K\subset\Omega \text{ kpkt} \\ \alpha\in\mathbb{N}_0^d}}$ auf $C_C^\infty(\Omega) = \bigcup_{K\subset\Omega \text{ kpkt}} \mathcal{D}_K(\Omega)$ erzeugte lokal-konvexe Topologie ist metrisierbar[2] und Hausdorffsch, also nicht vollständig (vgl. Rudin, S. 151)
2. Mittles induktivem Limes der Räume $\mathcal{D}_K(\Omega)$, $K \subset \Omega$ kompakt, erhält man überabzählbare Familie von Halbnormen [3] auf $\mathcal{C}_C^{\mathcal{D}}(\Omega)$ die eine vollständige, aber nicht metrisierbare, lokal-konvexe Hausdorff-Topologie τ_{il} auf $C_C^\infty(\Omega)$ erzeugt. Die Relativtopologie $\tau_{il}|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ ist die Topologie aus Satz 2.8.

2.10 Satz. *Seien $\phi_k, \phi \in \mathcal{D}(\Omega) := (\mathcal{C}_C^\infty(\Omega), \tau_{il})$, $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \phi_k = \phi \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \exists K \subset \Omega \textit{ kompakt mit } \operatorname{supp}\phi \subset K, \operatorname{supp}\phi_k \subset K \; \forall k \in \mathbb{N} \\ \textit{und } \lim_{k\to\infty} p_{k,\alpha}(\phi_k - \phi) = 0 \; \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d \end{array}$$

Beweis. Siehe z.B. Theorem V.17 in Reed/Simon □

2.11 Satz. *Seie Y ein topologischer Raum.*

[2] Ω ist durch abzählbar viele K's ausschöpfbar
[3] gegeben als Minkowski-Funktionale

a) Für $f : \mathcal{S} \to Y$ gilt: f stetig $\Leftrightarrow$ f folgenstetig.

b) Für Y, ein lokal-konvexer, topologischer Vektorraum und $f : \mathcal{D}(\Omega) \to Y$ linear gilt: f stetig $\Leftrightarrow$ f folgenstetig

Beweis. Es geht nur um "$\Leftarrow$"

- Klar da $\mathcal{S}$ das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.
- Sei $A \subseteq Y$ offen, z.z. $f^{-1}(A)$ offen in $\mathcal{D}(\Omega)$. Es genügt dies für $A \in$ Nachbarschaftsbasis der Topologie in Y zu tun. $\Rightarrow$ Annahme: A konvexe, absorbierende und balanzierte Nullumgebung in Y.

  $$\overset{\text{f linear}}{\Rightarrow} f^{-1}(A) \text{ konvex, absorbierend und balanziert in } \mathcal{D}(\Omega) \quad (1)$$

  Ausserdem gilt $\forall K \subset \Omega$ kompakt: $f|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ folgenstetig $\Rightarrow$ [4] $f|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ stetig

  $\Rightarrow f^{-1}(A) \cap \mathcal{D}_K(\Omega) = \left(f|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}\right)^{-1}(A)$ offene Nullumgebung in $\mathcal{D}_K(\Omega)$ (2)

  (1) und (2) $\Rightarrow f^{-1}(A)$ offene Nullumgebung in τ_{il}

$\square$

2.2 Die Fourier-Trafo auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Ziel. *Die Algebraisierung von Differentiation und Faltung!*

2.12 Definition. Für $x, \xi \in \mathbb{R}^d$ sei $x \cdot \xi = \sum_{j=1}^d x_j \xi_j$ das euklidische, Standard-Skalarprodukt und für $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ist

$$\hat{\phi}(\xi) \equiv (\mathcal{F}\phi)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} dx e^{-i\xi \cdot x} \phi(x)$$

wohldef (vgl. Satz 2.7(b)). Man nennt es das "Fourierintegral"

Warnung. *In der Literatur existieren viele verschiedene Konventionen zur Definition dieses Integrals!*

2.13 Satz (Rechenregeln für $\mathcal{F}$). *Sei $\phi \in \mathcal{S}, \xi \in \mathbb{R}^d$*

a) $\left(D^\alpha \hat{\phi}\right)(\xi) = (-i)^{|\alpha|} \widehat{(x^\alpha \phi)}(\xi) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d$

b) $\widehat{(D^\alpha \phi)}(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{\phi}(\xi) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d$

c) für $y \in \mathbb{R}^d$ sei $\tau_y : \mathcal{S} \to \mathcal{S}, \phi \mapsto \phi(\cdot - y)$. Es gilt:

$$\widehat{(\tau_y \phi)}(\xi) = e^{-iy\cdot\xi} \hat{\phi}(\xi)$$

d) $\widehat{(e^{iy\cdot x}\phi)}(\xi) = (\tau_y \hat{\phi})(\xi) = \hat{\phi}(\xi - y)$

[4] $D_K(\Omega)$ erfüllt 1. Abzählbarkeitsaxiom

e) für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei $\sigma_\lambda : \mathcal{S} \to \mathcal{S}, \phi \mapsto \phi(\lambda \cdot)$. Es gilt:

$$\widehat{(\sigma_\lambda \phi)}(\xi) = \frac{1}{|\lambda|^d} \left(\sigma_{\frac{1}{\lambda}} \hat{\phi}\right)(\xi) = \frac{1}{|\lambda|^d} \hat{\phi}(\frac{\xi}{\lambda})$$

f) für $\phi, \psi \in \mathcal{S}$ ist $\phi \times \psi := \int_{\mathbb{R}^d} dx \phi(x) \psi(\cdot - x) \in \mathcal{S}$ und es gilt:

$$\widehat{\phi \times \psi} = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{\phi}\hat{\psi}$$

g) $\widehat{\phi\psi} = (2\pi)^{\frac{-d}{2}} \hat{\phi} \times \hat{\psi}$

Beweis. a) Mittels Differentiation unter dem Fourier-integral. Dies ist erlaubt, da z.B.

$$\frac{\hat{\phi}(\xi') - \hat{\phi}(\xi)}{|\xi - \xi'|} = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} dx \underbrace{e^{-i\xi' x} \left(\frac{1 - e^{-i(\xi - \xi')x}}{|\xi - \xi'|}\right)}_{=: g_{\xi', \xi}(x)} \phi(x)$$

$$\Rightarrow \left| g_{\xi', \xi}(x) \right| = \frac{1}{|\xi - \xi'|} |1 - \underbrace{e^{-i(\xi - \xi')x}}_{5}|$$

$$\Rightarrow \left| g_{\xi, \xi'}(x) \right| \leq |x| + \frac{1}{2} const. \, |v|^2 \, r^2 =: \tilde{g}(x) \text{ für } |y| < r$$

$\tilde{g}\phi \in L^1$ ist integrierbare Majorante. Mit dominierter Konvergenz folgt daraus die Vertauschbarkeit. $\Rightarrow$ Behauptung für 1. partielle Ableitung, höhere Ableitungen analog.

$$\left(D_\xi^\alpha \hat{\phi}\right) = (2\pi)^{\frac{-d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} dx \underbrace{\left(D_\xi^\alpha e^{-i\xi x}\right)}_{(-i)^{|\alpha|} x^\alpha} \phi(x)$$

b) Da $D^\alpha \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d) \, \forall \beta \in \mathbb{N}_0^d$ darf man partiell integrieren:

$$\int_{\mathbb{R}^d} dx e^{-i\xi x} \left(D_x^\alpha \phi\right)(x) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} dx \; \underbrace{\left(D_x^\alpha e^{-i\xi x}\right)}_{(-i)^{|\alpha|} \xi^\alpha e^{-i\xi x}} \; \phi(x)$$

c) bis e) Nachrechnen

f) Übung

g) später

□

2.14 Satz. *$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ist stetig und linear*

Beweis. • $\phi \in \mathcal{S}$, zeige $\mathcal{F}\phi \in \mathcal{S}$. Satz 2.13(a) $\Rightarrow \mathcal{F}\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$

[5] Taylor nach $(\xi - \xi' =: y) : e^{-iyx} \sim 1 - iyx + \left(-\frac{1}{2}\right) \sum_{i,j=1}^d x_j, x_{j'} e^{-iyx} y_j y_{j'}$

- Schneller Abfall: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$:

$$i^{|\beta|}\xi^\beta (D^\alpha \hat{\phi})(\xi) \overset{2.13a),b)}{=} i^{|\beta|}(-i)^{|\alpha|}\xi^\beta \widehat{(x^\alpha \phi)}(\xi) = (-i)^\alpha \underbrace{\widehat{D^\beta (x^\alpha \phi)}}_{\psi \in \mathcal{S}}(\xi)$$

$$\text{Also: } p_{\beta,\alpha(\hat{\phi})} \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| (2\pi)^{\frac{-d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} dx e^{-i\xi x}\psi(x) \right| \leq (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \|\psi\|_1 < \infty.$$

- Linearität ist klar.

- Es genügt Stetigkeit in 0 zu zeigen (Satz 2.11 a) und wegen Satz 2.7(a) zeige nur Folgenstetigkeit. Sei $(\phi_k)_k \subset \mathcal{S}$ mit $\phi_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$ d.h. $\lim_{k\to\infty} \hat{p}_{j,m}(\phi) = 0 \; \forall j, m \in \mathbb{N}_0 \; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ gilt:

$$\begin{aligned}
p_{\alpha,\beta}(\hat{\phi}_k) &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} x^\alpha (D^\beta \phi_k)(x) e^{-i\xi x}} \right| \\
&\leq \left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{d+1}{2}}}}_{\gamma d^2 \text{ D}} \right) \underbrace{(1+x^2)^{\frac{d+1}{2}} \left| x^\alpha (D^\beta \phi_k)(x) \right|}_{\leq C_{\alpha,\beta} \tilde{p}_{d+1+|\alpha|,|\beta|}(\phi_k)} \\
&\leq \gamma_d C_{\alpha,\beta} \tilde{p}_{d+1+|\alpha|,|\beta|(\phi_k)} \xrightarrow{k \to \infty} 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow (\hat{\phi}_k)_k$ ist Nullfolge in $\mathcal{S}$

□

2.15 Lemma (Parseval-Formel)**.** $\forall \phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} dx \phi(x) \hat{\psi}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} dx \hat{\phi}(x) \psi(x)$$

Beweis. Fubini:

$$\int dx \phi(x) \int dy e^{-iyx} \psi(y) = \int dy \underbrace{\left(\int dx \phi(x) e^{-ixy} \right)}_{\hat{\phi}(y)} \psi(y)$$

□

2.16 Satz (Fouriescher Integralsatz auf $\mathcal{G}$)**.** $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \; \forall x \in \mathbb{R}^d$:

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} d\xi e^{ix\xi} \hat{\phi}(\xi) \quad \text{“Fourierumkehrintegral“} \quad (*)$$

Beweis. In 3 Akten:

1) Regularisierung des Umkehrintegrals mit $e^{-\epsilon \frac{\xi^2}{2}}$

2) Parseval-Formel

3) approximierende δ-Funktion

Nach majorisierter Konvergenz gilt: $\forall x \in \mathbb{R}^d$:

$$\phi(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} d\xi e^{-\epsilon \frac{\xi^2}{2}} \underbrace{e^{i\xi x}\hat{\phi}(\xi)}_{(\widehat{\tau_{-x}\phi})(\xi)}$$

Übung: $\phi(x) = e^{-\epsilon \frac{\xi^2}{2}} \quad \hat{\phi}(x) = \epsilon^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{2\epsilon}}$

$$\overset{\text{Parseval}}{\Longrightarrow} \phi(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^d} d\xi \quad \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \epsilon^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{2\epsilon}}}_{\text{approximierende } \delta\text{-Funktion}} \quad \frac{(\tau_{-x}\phi)(\xi)}{\phi(\xi + x)}$$

$$= {}^{6} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^d} dy \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \phi(y\sqrt{\epsilon} + x)$$

Da $\|\phi\|_\infty = p_{0,0}(\phi) \overset{\phi \in \mathcal{S}}{<} \infty \Rightarrow y \mapsto e^{-\frac{y^2}{2}} \|\phi\|_\infty$ ist von ϵ unabhängige Majorante des Integrals und $\in L^1$. $\Rightarrow$ dominierte Konvergenz.

$$\phi(x) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} dy \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}}_{1} \underbrace{\lim_{\epsilon \to 0} \phi(y\sqrt{\epsilon} + x)}_{\phi(x)} = \phi(x)$$

□

2.17 Definition. Die Abbildung

$$\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}, \phi \mapsto \check{\phi} \text{ mit } \check{\phi}(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} d\xi e^{ix\xi} \phi(\xi)$$

heißt <u>inverse Fouriertransformation</u>.

2.18 Korollar. *$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ist bijektiv: mit $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$, d.h. $\phi = \check{\hat{\phi}} = \hat{\check{\phi}}$*

2.19 Satz (Parseval-Gleichung)**.** *$\forall \phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gilt:*

$$\left\langle \hat{\phi}, \hat{\psi} \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} d\xi \overline{\hat{\phi}(\xi)} \hat{\psi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\phi(x)} \psi(x) = \langle \phi, \psi \rangle$$

Beweis. aus Parseval-Formel mit ϕ' wobei $\phi' = \overline{\hat{\phi}} = \check{\overline{\phi}}$

$$\Rightarrow \hat{\phi}' = \overline{\phi}$$

$$\Rightarrow \phi = \check{\hat{\phi}} = \hat{\overline{\overline{\phi}}} = \overline{\overline{\hat{\phi}}} \Rightarrow \overline{\phi} = \hat{\phi}$$

□

[6]Subst.: $y = \frac{\xi}{\sqrt{\epsilon}}$

2.3 Die Fourier-Trafo auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ und $L^1(\mathbb{R}^d)$

2.20 Satz. *$\exists_1$ unitärer, linearer Operator $\mathcal{F}_2$ auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ mit*

$$\mathcal{F}_2|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = \mathcal{F} \text{ und } \mathcal{F}_2^{-1}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} = \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$$

$\mathcal{F}_2$ heißt <u>L^2-Fourier-Trafo</u> (oder Fourier-Plancherel-Trafo). Die Parseval-Gleichung gilt $\forall \phi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$

Beweis. $\mathcal{F}$ linear und isometrisch auf $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}$ dicht in L^2 bzgl. $\|\cdot\|_2 \Rightarrow \exists_1$ isometrische, lineare Fortsetzung $\mathcal{F}_2$ auf L^2, analog bezeichne $\mathcal{F}_2^{-1}$ die eindeutige, isometrische Fortsetzung von $\mathcal{F}^{-1}$ auf L^2 und $\forall \phi \in L^2$ gilt:

$$\mathcal{F}_2^{-1}\mathcal{F}_2\psi =^{7} \lim_{k\to\infty} \underbrace{\underbrace{\mathcal{F}_2^{-1} \underbrace{\mathcal{F}_2\phi_k}_{\mathcal{F}\phi_k}}_{\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\phi_k}}_{\phi_k} = \psi \overset{\text{analog}}{=} \mathcal{F}_2\mathcal{F}_2^{-1}\psi$$

$\Rightarrow \mathcal{F}_2^{-1}\mathcal{F}_2 = \mathbb{1} = \mathcal{F}_2\mathcal{F}_2^{-1}$, d.h. $\mathcal{F}_2$ ist unitär und die Notation $\mathcal{F}_2^{-1}$ ist gerechtfertigt. Parseval auf L^2 aus Satz 2.19 und Approximation wie oben. □

2.21 Bemerkung. i) Parsevalgleichung $\Rightarrow \langle \phi, \mathcal{F}_2^*\mathcal{F}_2\psi\rangle = \langle \phi, \psi\rangle \quad \forall \phi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, d.h. $\mathcal{F}_2^* = \mathcal{F}_2^{-1}$ und die Notation $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$ auf $\mathcal{S}$ macht Sinn.

ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+|x|^{\frac{3}{4}}} \in L^2(\mathbb{R})$ aber $\int_{\mathbb{R}} dx e^{-i\xi x} f(x)$ existiert für kein $\xi \in \mathbb{R}$!
<u>Frage:</u> Wie wirkt $\mathcal{F}_2$? <u>Antwort:</u> Integral abschneiden!

2.22 Satz (Plancherel). *$\forall k > 0, \xi \in \mathbb{R}^d$ und $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ist*

$$\hat{f}_k(\xi) := (2\pi)^{\frac{-d}{2}} \int_{B_k(0)} e^{-i\xi x} f(x) \quad \text{und} \quad \check{f}_k(\xi) := (2\pi)^{\frac{-d}{2}} \int_{B_k(0)} e^{+i\xi x} f(x)$$

wohldefiniert und es gilt:

$$\lim_{k\to\infty} = \left\| \hat{f}_k - \mathcal{F}_2 f \right\|_2 = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} = \left\| \check{f}_k - \mathcal{F}_2^{-1} f \right\|_2 = 0$$

Beweis. nur für $\hat{f}_k$ (analog für $\check{f}_k$)
Sei $g_k := f\chi_{B_k(0)} \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$

$$|f - g_k|^2 \le |f|^2 \in L^1(\mathbb{R}^d) \overset{\text{dom. Konvergenz}}{\Longrightarrow} \lim_{k\to\infty} \|f - g_k\|_2 = 0$$

Somit:

$$\|\mathcal{F}_2 g_k - \mathcal{F}_2 f\|_2 = \|\mathcal{F}_2(g_k - f)\|_2 \overset{\text{Isom.}}{=} \|g_k - j\|_2 \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

und die Behauptung folgt dann aus $\mathcal{F}_2 g_k = \hat{f}_k \quad (*)$

---

[7] $(\phi_n)_n \subset \mathcal{S} \quad \|\psi - \phi_k\| \xrightarrow{k\to\infty} 0$ und $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_2^{-1}$ stetig

Beweis. [von (*):] $\forall \phi \in \mathcal{S}\ \forall \psi \in L^2$ gilt: $\langle \phi, \mathcal{F}_2\psi\rangle = \langle \mathcal{F}^*\phi, \psi\rangle$ setze $\psi = g_k$

$$\Rightarrow \langle \phi, \mathcal{F}_2 g_k\rangle = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{B_k(0)} dy \left(\overline{\int_{\mathbb{R}^d} e^{+iyx}\phi(x)}\right) f(y)$$
$$\overset{\text{Fubini}}{=} (2\pi)^{\frac{-d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} dx\overline{\phi(x)} \underbrace{\int_{B_K(0)} dy e^{-iyx} f(y)}_{\hat{f}_k(x)}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}}^{d} \overline{\phi(x)} \left[(\mathcal{F}_2 g_k)(x) - \hat{f}_k(x)\right] = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{S}$$

$\overset{\text{nächster Satz}}{\Longrightarrow} \mathcal{F}_2 g_k(x) = \hat{f}_k(x)$ für Lebesgue f.a. $x \in \mathbb{R}^d$ □

2.23 Satz (Fundamentallemma der Variationsrechnung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet, $f \in L^1_{loc}(\Omega) := \{g : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar und $g\chi_K \in L^1(\Omega)\ \forall K \subset \Omega$ kompakt$\}$ Falls $\int_\Omega dx\phi(x)f(x) = 0\ \forall \phi \in C_C^\infty(\Omega)$ $f(x) = 0$ für Lebesgue fast alle $x \in \Omega$*

Beweis. mit Darstellungssatz von Riesz für komplexes Maß $\mu := \int_\cdot dx f(x)$ auf $K \subset \Omega$ (kompakt), Details: Übung. □

2.24 Definition.

- Fourier-Trafo auf $L^1(\mathbb{R}^d)$ $\mathcal{F}_1 : L^1(\mathbb{R}^d) \ni \phi \mapsto \mathcal{F}_1(\phi) := \hat{\phi}$, $\hat{\phi}(\xi)$ durch 2.12 wohldefiniert. $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$ und es gilt
$$\left\|\hat{\phi}\right\|_\infty \leq (2\pi)^{\frac{-d}{2}} \|\phi\|_1 \tag{2.1}$$
- $C_0(\mathbb{R}^d) := \{\phi \in C(\mathbb{R}^d) : \lim_{|x|\to\infty} \phi(x) = 0\}$ ist Banach-Raum bzgl. $\|\cdot\|$

2.25 Satz (Riemann-Lebesgue-Lemma)**.** *$\mathcal{F}_1 : L^1(\mathbb{R}^d) \to C_0(\mathbb{R}^d)$ ist linear und stetig.*

Beweis. Klar $\mathcal{F} : \left(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_1\right) \to \left(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty\right) \subset \left(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty\right)$ ist linear und stetig wegen (1). Da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dicht in $L^1(\mathbb{R}^d)$ bzgl. $\|\cdot\|_1 \Rightarrow$ [8]$\exists_1$ stetige, lineare Fortsetzung $\tilde{\mathcal{F}} : L^1(\mathbb{R}^d) \to C_0(\mathbb{R}^d)$ die (1) erfüllt $\overset{\text{Eindeutigkeit}}{\Longrightarrow} \tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_1$ □

2.26 Bemerkung.

i) Jedes $\phi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ ist sogar gleichmäßig stetig. Für $\psi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ folgt gleichmäßiges Stetigkeit von $\hat{\psi}$ auch direkt aus (1)

ii) Es gibt keine Parseval-Gleichung für $\mathcal{F}_1$, wohl aber die Parseval-formel.

iii) Für $\mathcal{F}_1$ gilt Satz 2.13 (c) - (f); (a), (b), (g) gelten nur unter Zusatzvorraussetzungen.

iv) $\mathcal{F}_1$ in Satz 2.25 ist nicht surjektiv. (siehe z.B. Kolmogorov/Fourier, Elements of the theory of functions, Greylock Press 1957 Sect. VIII 4.7.

2.27 Satz (Fourierscher Integralsatz für L^1)**.** *Sei $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und für $\epsilon > 0$ sei $\phi_\epsilon(x) := (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} d\xi e^{ix\xi} e^{-\frac{\epsilon\xi^2}{2}} \hat{\phi}(\xi)$. Dann gilt:*

i) $\lim_{\epsilon\to 0} \|\phi - \phi_\epsilon\|_1 = 0$ *und*

ii) $\lim_{\epsilon\to 0} \phi_\epsilon(x) = \phi(x)$ *für Lebesgue fast alle $x \in \mathbb{R}^d$*

Beweisidee. Analog zu Satz 2.16 auf $\mathcal{S}$. Im 3. Schritt verwende für (i) Lemma I.3.48, für (ii) ein analoges fast überall Resultat (komplizierter!) □

[8] Satz über beschränkte, lineare Fortsetzung

2.4 Distributionen

Ziel. *Verallgemeinerung des Funktionsbegriff*

Nutzen.
- *Ableitung nicht differenzierbarer Funktionen*
- *Lösungen von PDE*

2.28 Definition. a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen. $\mathcal{D}^{'}(\Omega) := \{T : \mathcal{D}(\Omega \to \mathbb{C} : T$ linear und stetig$\}$ heißen Distributionen über Ω.

b) $\mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^d) := \{T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ mit T linear und stetig$\}$ heißen temperierte Distributionen (über $\mathbb{R}^d$).

2.29 Lemma (und Bemerkung)**.** *In beiden Fällen folgt Stetigkeit bereits aus der Folgenstetigkeit. Stetigkeit $\leftrightarrow$ Beschränktheit.*
Sei $X = \mathcal{D}(\Omega)$ oder $X = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt für $T : X \to \mathbb{C}$ linear.

$$T \in X^{'} \Leftrightarrow \forall (\phi_k)_k \subset X \text{ mit } \lim_{k\to\infty} \phi_k = 0 \text{ (in } X) : \lim_{k\to\infty} T(\phi_k) = 0 \text{ (in } \mathbb{C})$$

Beweis. Da T linear und Satz 2.11. □

2.30 Lemma. *Sei $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ linear. Dann gilt: $T \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow$*

$$\exists j, m \in \mathbb{N}_0 \exists c > 0 : |T(\phi)| \leq c \underbrace{\tilde{p}_{j,m}(\phi)}_{\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\frac{j}{2}} \sum_{|\alpha|\leq m} |\mathcal{D}_\alpha \phi(x)|\right)} \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

Beweis. "$\Leftarrow$" (Bem 2.29) sei $(\phi_k)_k \subset \mathcal{S}; \phi_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ in $\mathcal{S} \Rightarrow \tilde{p}_{j,m}(\phi_k) \xrightarrow{k\to\infty} 0$ $\forall j^{'}, m^{'} \in \mathbb{N}_0$, insbesondere für j,m aus Behauptung. $\Rightarrow |T(\phi_k)| \xrightarrow{k\to\infty} 0$

"$\Rightarrow$" per Widerspruch:
Ann: Sei T stetig und $\forall k \in \mathbb{N} \exists \phi_k \in \mathcal{S}$ mit $|T(\phi_k)| > k\tilde{p}_{k,k}(\phi_k)$.
Sei $\psi_k := \dfrac{\phi_k}{|T(\phi_k|} \Rightarrow \dfrac{1}{k} > \tilde{p}_{k,k}(\psi_k) \geq \tilde{p}_{j,m}(\psi_k) \forall j, m \leq k$ also
$\lim_{k\to\infty} \tilde{p}_{j,m}(\psi_k) = 0 \ \forall j, m \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \psi_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ in $\mathcal{S}$, aber $|T(\psi_k)| = 1 \ \forall k$
Widerspruch zu T stetig.
□

2.31 Lemma. *Sei $\Gamma : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ linear. Dann gilt: $T \in \mathcal{D}^{'}(\Omega) \Leftrightarrow \forall K \subset \Omega$ kompakt $\exists C > 0, m \in \mathbb{N}_0$ mit $|T(\phi)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \hat{p}_{k,\alpha}(\phi) \forall \phi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$*

Beweis. Beweis analog zu Lemma 2.30 □

2.32 Satz. *Es gibt eine injektive Einbettung $\mathcal{I}^{'} : \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^d)$, d.h. für $T \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^d)$ gilt: $T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} \in \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^d)$ und für $T \neq S \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^d)$: $T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} \neq S|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)}$*

Beweis. Sei $i : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ die kanonische Einbettung. Dann gilt: $T|_{\mathcal{D}} = T \circ i$ und i ist stetig. Begründung: Da $\forall K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt gilt: $\forall \phi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^d)$ $p_{\alpha,\beta}(\phi) \leq \sup_{x\in K} |x^\alpha| \, \hat{p}_{k,\beta}(\phi) \Rightarrow i$ Folgenstetig. $\xrightarrow[\text{i linear}]{\text{Satz 2.11}}$ stetig $\Rightarrow$ Behauptung injektiv: Sei $T, S \in \mathcal{S}'$ mit $T \neq S \Rightarrow \exists \phi \in \mathcal{S}$[9] mit $T(\phi) \neq S(\phi)$ Behauptung: $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (bzgl. lokal konvexer Topologie von $\mathcal{S}$(s.u.) $\Rightarrow \exists (\phi_k)_k \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ mit $\phi_k \xrightarrow{k\to\infty} \phi$ in $\mathcal{S}$

$$\begin{aligned} \text{T,S stetig } &\Rightarrow \lim_{k\to\infty} T(\phi_k) \neq \lim_{k\to\infty} S(\phi_k) \\ &\Rightarrow \exists k_0 : T(\phi_{k_0}) \neq S(\phi_{k_0}) \Rightarrow T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \neq S|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)}} \end{aligned}$$

zur Dichtheit von $\mathcal{D}$ in $\mathcal{S}$: Sei $\psi \in \mathcal{S}$, sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $f(x) = 1 \ \forall x : |x| \leq 1$ $f_n := f(\frac{1}{n}\cdot)$, somit $f_n\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$[10] $\forall n \in \mathbb{N}$ und $f_n\psi \xrightarrow{n\to\psi}$ in $\mathcal{S}$, da $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d : p_{\alpha,\beta}(\psi(1-f_n))$ □

2.33 Bemerkung. Man topologisiert $X' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ oder $\mathcal{D}'(\Omega)$ durch die schwach-*-Topologie, die von der Familie der Halbnormen $\{p_\phi : T \mapsto |T(\phi)| = p_\phi(T)\}_{\phi\in X}$ erzeugt wird. Für $(T_n)_n \subset X', T \in X'$ gilt: $T_n \xrightarrow{n\to\infty} T$ in $X' \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} T_n(\phi) = T(\phi) \ \forall \phi \in X$

2.34 Beispiel. (i) Sei $K \subset \Omega$ kompakt und $\mu \in \mathcal{M}(K)$ (komplexe Borel-Maße auf K). $\Rightarrow T_\mu : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}, \phi \mapsto T_\mu(\phi) := \int_K d\mu(x)\phi(x)$ liegt in $\mathcal{D}'(\Omega)$ (vgl. Satz von Riesz-Markov)

(ii) Sei $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}, \phi \mapsto T_f(\phi) := \int_{\mathbb{R}^d} dx f(x)\phi(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Dies nennt man "reguläre Distribution"
Warnung: i.A. $T_f \notin \mathcal{S}'$

(iii)
- Dirac-Distribution (bei $x_0 \in \mathbb{R}^d$) $\delta_{x_0} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}, \phi \mapsto \delta_{x_0}(\phi) := \phi(x_0) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$
- $\delta'_{x_0} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}, \phi \mapsto \phi'(x_0) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$
- $\delta^{(\alpha)}_{x_0} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}, \phi \mapsto (-1)^{|\alpha|} (D^\alpha\phi)(x_0) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

2.35 Definition. Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$

- für $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ oder $\in \mathcal{D}'(\Omega)$ heißt $D^\alpha T := (-1)^{|\alpha|} T \circ D^\alpha$ distributionelle $(\alpha-)$ Ableitung von T.
- Sei $f \in L^1_{loc}(\Omega); Y \subset L^1_{loc}(\Omega)$
  f hat schwache $(\alpha-)$Ableitung in Y $\Leftrightarrow \exists g \in Y$ mit $D_\alpha T_f = T_g$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$
  Notation: $g = D^\alpha f$

2.36 Bemerkung. i) Falls die schwache Ableitung existiert, so ist sie eindeutig (wende Satz 2.23 an)

ii) Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \cap C^{|\alpha|}(\Omega)$. Dann gilt $\forall \phi \in C_C^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} (D^\alpha T_f)(\phi) &= \int_\Omega dx f(x)(-1)^{|\alpha|} (D^\alpha\phi)(x) \overset{\text{P.I.}}{=} \int_\Omega dx \, (D^\alpha f)(x)\phi(x) \\ &= T_{D^\alpha f}(\phi) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ schwache Ableitung stimmt mit gewöhnlicher überein, falls letztere existiert.

[9] Fehler im Originalskript
[10] Diskrepanz zum Skript

2.37 Beispiel. Sei $x \in \mathbb{R}^d$

i) $(D^\alpha \delta_x)(\phi) = (-1)^{|\alpha|}\delta_x(D^\alpha\phi) = (-1)^{|\alpha|}(x)\ \forall \phi \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow D^\alpha\delta_x = \delta_x^{(\alpha)}$

ii) $f(x) := \ln|x|$ für $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. In $\mathcal{D}^{'}(\mathbb{R})$ gilt:

$$DT_f(\phi) = -\underbrace{\int_{\mathbb{R}} dx \ln|x|\,\phi^{'}(x)}_{\int_{-\infty}^{0}\cdots+\int_0^\infty\cdots}$$

$$= \lim_{\epsilon\searrow 0}\left[\underbrace{-\int_{-\infty}^{-\epsilon}{}^{11}dx\,(\ln(-x))\,\phi^{'}(x)}_{-\ln(-x)\phi(x)|_{-\infty}^{-\epsilon}+\int_{-\infty}^{-\epsilon}dx\,\frac{1}{x}\phi(x)} \underbrace{-\int_{\epsilon}^{\infty} dx\,(\ln(x))\,\phi^{'}(x)}_{-\ln x\phi(x)|_\epsilon^\infty+\int_\epsilon^\infty dx\,\frac{1}{x}\phi(x)}\right]$$

$$\lim_{\epsilon\searrow 0}\left[\underbrace{(\ln\epsilon)(\phi(\epsilon)-\phi(-\epsilon))}_{\sim\epsilon\ln\epsilon\phi^{'}(0)\xrightarrow{\epsilon\to 0}0} + \dots\right]$$

$$\lim_{\epsilon\searrow 0}\int_{\mathbb{R}\setminus[-\epsilon,\epsilon]} dx\frac{1}{x}\phi(x) =: PV\int_{\mathbb{R}} dx\frac{1}{x}\phi(x)$$

Also "$D\ln|x| = PV\frac{1}{x}$"

iii) $f(x) = \theta(x) := \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow$ In $\mathcal{D}^{'}(\mathbb{R})$

$$(DT_f)(\phi) = -\int_{\mathbb{R}} dx\theta(x)\phi^{'}(x) = -\int_0^\infty dx\phi^{'}(x) = \phi(0) = \delta_0(\phi)\ \forall\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$\Rightarrow \mathcal{D}T_f = \delta$

2.38 Definition. Sei $T \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^d)$

$$\mathcal{F}^{'}T := T\circ\mathcal{F} \in {}^{12}\mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^d),\ \text{wobei}\ \left(\mathcal{F}^{'}T\right)(\phi) = T(\hat{\phi})\ \forall\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

heißt Fourier-Transformierte von T. analog: $\mathcal{F}^{'*}T := T\circ\mathcal{F}^*$

2.39 Beispiel. i) Sei $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \forall\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\left(\mathcal{F}^{'}T_\psi\right)(\phi) = T_\psi(\hat{\phi}) = \int_{\mathbb{R}^d} dx\psi(x)\hat{\phi}(x) = {}^{13}\int_{\mathbb{R}^d} dx\hat{\psi}(x)\phi(x) = T_{\hat{\psi}}(\phi)$$

also $\mathcal{F}^{'}T_\psi = T_{\hat{\psi}}$ (kompatibel!)

ii) $\left(\mathcal{F}^{'}T_{e^{ix\cdot}}\right)(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} d\xi e^{ix\cdot\xi}\hat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{\frac{d}{2}}\phi(x) \Rightarrow \mathcal{F}^{'}T_{e^{ix\cdot}} = (2\pi)^{\frac{d}{2}}\delta_x$
<u>Beachte:</u> $\hat{f}(\xi) := e^{ix\cdot\xi}$ erfüllt $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)\ \forall s < -\frac{d}{2}$

---

[12]da $\mathcal{F}:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ stetig
[13]Parseval-Formel

2.40 Satz. $\mathcal{F}^{'}: \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^d)$ *ist linear, schwach-*-stetig und bijektiv mit* $\mathcal{F}^{'-1} = \mathcal{F}^{'*}$

Beweis.
- linear:

$$\left(\mathcal{F}^{-1}(\alpha T + \beta S)\right)(\phi) = (\alpha T + \beta S)(\hat{\phi}) = \alpha T(\hat{\phi}) + \beta S(\hat{\phi})$$
$$= \alpha(\mathcal{F}^{'}T)(\phi) + \beta(\mathcal{F}^{'}S)(\phi)$$

- stetig: (schwach-*-Topologie, siehe Bemerkung 2.33)
  Sei $U \in$ Umgebungsbasis von $T = 0$ in $\mathcal{S}^{'} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \phi_1, \cdots, \phi_n \in \mathcal{S}$ und $r_1, \ldots, r_n > 0$: $U = \{T \in \mathcal{S}^{'} : |T(\phi_j)| < r_j$ für $j = 1, \ldots, n\}$ Für $T = \mathcal{F}'S$ gilt $(\mathcal{F}^{'}S)(\phi_j) = S(\hat{\phi}_j)$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathcal{F}^{'-1}}_{\text{Urbild}}(U) = \left\{S \in \mathcal{S}^{'} : \left|S(\check{\phi}_j)\right| < r_j \text{ für } j = 1, \ldots, n\right\}$$

  schwach-*-offen in $\mathcal{S}^{'}$

- bijektiv:

$$\left(\mathcal{F}^{'*}\mathcal{F}^{'}T\right)(\phi) = \left(\mathcal{F}^{'}T\right)(\mathcal{F}^{*}\phi) = T\left(\mathcal{F}\mathcal{F}^{*}\phi\right) = T(\phi)\ \forall \phi \in \mathcal{S}$$

  $\Rightarrow \mathcal{F}^{'*}\mathcal{F}^{'} = \mathbb{1}$ auf $\mathcal{S}^{'}$ und analog $\mathbb{1} = \mathcal{F}^{'}\mathcal{F}^{'*}$(analog)

$\square$

Folgende Raüme spielen eine zentrale Rolle in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

2.41 Definition (Sobolev-Räume)**.** Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gebiet $p \in [1, \infty], m \in \mathbb{N}_0$

$$H^{m,p}_{(\text{loc})} := \{f \in L^p_{(\text{loc})}(\Omega) : D^\alpha f \in L^p_{(\text{loc})}\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ mit } |\alpha| \le m\}$$

$H^m(\Omega) := H^{m,2}(\Omega)$

2.42 Satz. $H^{m,p}(\Omega)$ *ist ein Banach-Raum bzgl. der Norm* $\|f\|_{m,p} := \left(\sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha f\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$
$H^m(\Omega)$ *ist ein Hilbertraum bzgl. des Skalarprodukts* $\langle f, g\rangle_m := \sum_{|\alpha|\le m} \underbrace{\langle D^\alpha f, D^\alpha g\rangle}_{\int_\Omega \overline{(D^\alpha f)(x)}(D^\alpha g)(x)}$

Beweis. Sei $(f_n)_k \subset H^{m,p}$ Cauchy $\Rightarrow (D^\alpha f_n)_k \subset L^p$ ist Cauchy $\forall |\alpha| \le m \Rightarrow \exists g_\alpha \in L^P : \|D^\alpha f_k - g_\alpha\|_p \xrightarrow{k\to\infty} 0\ \forall |\alpha| \le m$ Zeige $g_\alpha = D^\alpha g_0$ (schwach): $\forall \phi \in C_C^\infty(\Omega) : \int_\Omega f_k(x)\left(D^\alpha \phi\right)(x) = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega dx\left(D^\alpha f_k\right)(x)\phi(x) = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega dx g_\alpha(x)\phi(x) +$ $\underbrace{(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega dx\phi(x)\left[D^\alpha f_k(x) - g_\alpha(x)\right]}_{=:I_k} \Rightarrow |I_k| \overset{\text{Hölder}}{\le} \|D^\alpha f_k - g_\alpha\|_p \underbrace{\|\phi\|_q}_{<\infty} \xrightarrow{k\to\infty} 0$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \underbrace{\int_\Omega dx f_k(x)\left(D^\alpha\phi\right)(x)}_{\int_\Omega dx g_0(x)(D^\alpha\phi)(x) + \underbrace{\int_\Omega dx[f_n(x) - g_0(x)]\left(D^\alpha\phi\right)(x)}_{J_k}} = (-1)^\alpha \int_\Omega dx g_\alpha(x)\phi(x)$$

mit $|J_k| \le \|f_k - g_0\|_p \|D^\alpha\phi\|_q \xrightarrow{0}$

$\square$

2.43 Satz (Lemma von Sobolev)**.** *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *ein Gebiet, seien* $m, k \in \mathbb{N}_0$, $p > 1$ *mit* $k < m - \frac{d}{p}$. *Dann gilt:*

$$\forall f \in H^{m,p}(\Omega)\ \exists \phi_f \in C^k(\Omega) \text{ mit } f = \phi_f \text{ f.ü. auf } \Omega$$

(d.h. die Äquivalenzklasse f *hat einen Vertreter in* C^k*)*

Beweis. Siehe z.B. Werner, Funktionalanalysis Satz V.2.12 (nur p=2) oder R. Adams, Sobolev Spaces □

Charakterisierung von $H^m(\mathbb{R}^d)$ *ohne Ableitung:*

2.44 Satz. *Sei* $m \in \mathbb{N}_0$

$$H^m(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d) : (1 + |\cdot|^2)^{\frac{d}{2}} \mathcal{F}_2 f \in L^2(\mathbb{R}^d) \right\}$$

Die Sobolev-Norm $\|\cdot\|_{m,2}$ *und die für* $f \in H^m(\mathbb{R}^d)$ *gegebene Norm* $|||f|||_m = \left\| (1 + |\cdot|^2)^{\frac{m}{2}} \mathcal{F}_2 f \right\|_2$ *sind äquivalent.*

Beruht auf Algebraisierung der schwachen Ableitung durch Fourier-Trafo analog zu Satz 2.13 b).

2.45 Lemma. *Sei* $f \in H^m(\mathbb{R}^d)$ *für ein* $m \in \mathbb{N}_0$. *Dann gilt:*

$$[\mathcal{F}_2 \underbrace{(D^\alpha f)}_{schwach}](\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha (\mathcal{F}_2 f)(\xi) \text{ für Lebesgue-f.a. } \xi \in \mathbb{R}^d\ \forall |\alpha| \leq m$$

[14]

[14] Warum fehlen Seiten 81-82?

Kapitel 3

Unbeschränkte Operatoren

Im Folgenden ist $\mathcal{H}$ *ein Hilbertraum und* $A : \mathrm{dom}(A) \to \mathcal{H}$ *linear, wobei* $\mathrm{dom}(A) \subseteq \mathcal{H}$

3.1 Definitionsbereich und Erweiterungen

3.1 Definition. Sei $A : \mathrm{dom}(A) \to \mathcal{H}$ linear,

- A dicht definiert: $\Leftrightarrow \overline{\mathrm{dom}(A)} = \mathcal{H}$
- $B : \mathrm{dom}(B) \to \mathcal{H}$ ist Erweiterung von A $\Leftrightarrow \mathrm{dom}(B) \supseteq \mathrm{dom}(A)$ und $B|_{\mathrm{dom}(A)}$

  Notation. $B \supseteq A$

3.2 Bemerkung. Für zwei lineare Operatoren A,B gilt: $A = B \Leftrightarrow \mathrm{dom}(A) = \mathrm{dom}(B)$ und $A\psi = B\psi \quad \forall \psi \in \mathrm{dom}(A)$

3.3 Beispiel. Sei $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$

i) Multiplikationsoperator $Q : \psi \mapsto Q\psi$ mit $(Q\psi)(x) := x\psi(x)\ \forall x \in \mathcal{H}$ und maximalem Definitionsbereich

$$\mathrm{dom}(Q) := \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} x^2 \left|\psi(x)\right|^2 dx < \infty\}$$

ii) Differentiationsoperator $D_{\min}$: $\mathrm{dom}(D_{\min}) := C_C^\infty(\mathbb{R}),\ D_{\min}\psi := i\psi'$

iii) Differentiationsoperator $D_{\max}$: $\mathrm{dom}(D_{\max}) := H^1(\mathbb{R}),\ D_{\max}\psi := i\psi'$[1]
Klar: $D_{\min} \subseteq D_{\max}$

Wiederholung.

- $\mathcal{G}(A) := \{(\psi, A\psi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : \psi \in \mathrm{dom}(A)\}$
- $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ *ist Hilbertraum bzgl. Skalarprodukt* $\langle(\psi_1,\psi_2),(\phi_1,\phi_2)\rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} := \langle\psi_1,\phi_1\rangle + \langle\psi_2,\phi_2\rangle$
- *A abgeschlossen:* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{G}(A)$ *abgeschlossen in* $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$

[1](schwache Ableitung)

$\overline{\mathcal{G}(A)}$ *muss nicht der Graph eines Operators sein, deshalb:*

3.4 Definition. i) $A : \mathrm{dom}(A) \to \mathcal{H}$ linear ist abschließbar: $\Leftrightarrow \exists B \supseteq A, B$ abgeschlossen.[2]

ii) Für A abschließbar ist $\overline{A}$, der Abschluss von A, die kleinste abgeschlossene Erweiterung von A.

$$\left[\mathrm{dom}(\overline{A}) := \bigcap_{\substack{B \supseteq A \\ \text{B abgeschlossen}}} \mathrm{dom}(B)\right]$$

3.5 Lemma. *Für A abschließbar gilt:* $\mathcal{G}(\overline{A}) = \overline{\mathcal{G}(A)}$

Beweis. Übung □

3.6 Beispiel. $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ Differentiationsoperator D_1 :

$$\mathrm{dom}(D_1) := C^1_C(\mathbb{R}) \; D_1\psi := i\psi^{'}$$

Behauptung: $\overline{\mathcal{G}(D_{\min})} \supseteq \mathcal{G}(D_1)$ $\left[\text{später: } D_{\min} \text{ abschließbar, also } \overline{D_{\min}} \supseteq D_1\right]$
Beweis: (vgl. Dichtheit von C^∞_C in C_C).
Sei $j \in C^\infty_C(\mathbb{R})$ ein Mollifier (glättender Kern), d.h. $j \geq 0, \int dxj = 1$ und $j_\epsilon := \frac{1}{\epsilon} j(\frac{1}{\epsilon}\cdot)$ für $\epsilon > 0$

$$\Rightarrow \phi_\epsilon := j_\epsilon \times \phi \in C^\infty_C(\mathbb{R}) \quad \forall \phi \in C^1_C(\mathbb{R})$$

und: $\lim_{\epsilon \searrow 0} \|\phi_\epsilon - \phi\|_2 = 0$ (sogar in $\|\cdot\|_\infty$)
wegen $\frac{d}{dx}\phi_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} dt \underbrace{\frac{d}{dx} j_\epsilon(x-t)}_{-\frac{d}{dt} j_\epsilon(x-t)} \phi(t) = j_\epsilon * \phi^{'}$

$$\Rightarrow \lim_{\epsilon \to 0} \|D_1\phi_\epsilon - D_1\phi\|_2 = 0$$

$$\Rightarrow (\phi, D_1\phi) \in \overline{\mathcal{G}(\mathsf{D}_{\min})} \quad \forall \phi \in C^1_C(\mathbb{R})$$

Eine leichte Verallgemeinerung von I.5.7 b)

3.7 Definition. Sei $A : \mathrm{dom}(A) \to \mathcal{H}$ linear, dicht definiert.

$$\mathrm{dom}(A^*) := \{\phi \in \mathcal{H} : \exists \eta \equiv \eta\phi \in \mathcal{H} \text{ mit } \langle \phi, A\psi \rangle = \langle \eta, \psi \rangle \; \forall \psi \in \mathrm{dom}(A)\}$$

$$A^*\phi := \eta_\phi \quad \forall \phi \in \mathrm{dom}(A^*) \text{ ist der zu A adjungierte Operator.}$$

3.8 Bemerkung. i) η_ϕ ist eindeutig bestimmt, da $\mathrm{dom}(A)$ dicht in $\mathcal{H}$

ii) $B \supseteq A \Rightarrow B^* \subseteq A^{\{*\}}$

iii) $\mathrm{dom}(A^*)$ kann sehr klein sein, u. U. $= 0$

iv) falls $\mathrm{dom}(A^*)$ dicht $\Rightarrow A^{**} := (A^*)^*$ wohldef.

3.9 Satz. *Sei $A : \mathrm{dom}(A) \to \mathcal{H}$ linear, dicht definiert. Dann gilt:*

[2] Hier fehlt doch sicher was; oder versteh ich das falsch?

i) A^* ist abgeschlossen.

ii) A abschließbar $\Leftrightarrow$ $\mathrm{dom}(A^*)$ dicht in $\mathcal{H}$. In diesem Fall ist $\overline{A} = A^{**}$

iii) A abschließbar $\Rightarrow (\overline{A})^* = A^*$

Beweis. Vorspiel:

- $V : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H} \times \mathcal{H}, (\phi, \psi) \mapsto (-\psi, \phi)$ ist unitär, da $V^2 = -\mathbb{1}$, also $V^{-1} = V$ und

$$\langle (\phi_1, \psi_1), V(\phi_2, \psi_2) \rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = -\langle \phi_1, \psi_2 \rangle + \langle \psi_1, \phi_2 \rangle = \left\langle \underbrace{(\psi_1, -\phi_1)}_{=:V^*(\phi_1,\psi_1)}, (\phi_2, \psi_2) \right\rangle$$

$$\Rightarrow V^* = -V = V^{-1}$$

- Sei E Unterraum von $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \Rightarrow V(E^\perp) = (V(E))^\perp$ (*), da:

"$\subseteq$" $0 = \left\langle \underline{(\phi_1, \psi_1)}_{\in E^\perp}, (\phi_2, \psi_2) \right\rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = \langle V(\phi_1, \psi_1), V(\phi_2, \psi_2) \rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} \quad \forall (\phi_2, \psi) \in E$

"$\supseteq$" $0 = \langle (\phi_1, \psi_1), V(\phi_2, \psi_2) \rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = \langle -V(\phi_1, \psi_1), (\phi_2, \psi_2) \rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}$

$$-V(\phi_1, \psi_1) = (\psi_1, -\phi_1) \in E^\perp$$

$$(\phi_1, \psi_1) = V(\psi_1, -\phi_1) \in V(E^\perp)$$

i) Behauptung: $\mathcal{G}(A^*) = (V(\mathcal{G}(A))^\perp$ ($\Rightarrow$ abgeschlossen), da

$$\begin{aligned}(\phi, \eta) \in (V(\mathcal{G}(A)))^\perp &\Leftrightarrow 0 = \langle (\phi, \eta), V(\psi, A\psi) \rangle \quad \forall \psi \in \mathrm{dom}(A) \\ &\Leftrightarrow \langle \phi, A\psi \rangle = \langle \eta, \psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathrm{dom}(A) \\ &\Leftrightarrow \phi \in \mathrm{dom}(A^*) \wedge \eta = A^*\phi \\ &\Leftrightarrow (\phi, \eta) \in \mathcal{G}(A^*)\end{aligned}$$

ii) Da $\mathcal{G}(A)$ Unterraum von $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \Rightarrow$

$$\overline{\mathcal{G}(A)} = \left((\mathcal{G}(A))^\perp\right)^\perp = \left(\underbrace{V^2\left(\mathcal{G}(A)^\perp\right)}_{V(V\mathcal{G}(A))^\perp \overset{(i)}{=} V\mathcal{G}(A^*)} \right)^\perp = (V\mathcal{G}(A^*))^\perp$$

Also:

- falls A^* dicht definiert $\overset{(i)}{\Rightarrow} \overline{\mathcal{G}(A)} = \mathcal{G}(A^{**})$, d.h. A abschließbar und $\overline{A} = A^{**}$
- falls A^* nicht dicht definiert $\Rightarrow \exists 0 \neq \psi \in \mathrm{dom}(A^*)^\perp \Rightarrow (-\psi, 0) \in \mathcal{G}(A^*)^\perp \Rightarrow (0, \psi) \in V\left(\mathcal{G}(A^*)^\perp\right) \overset{(*)}{=} (V\mathcal{G}(A^*))^\perp \Rightarrow \overline{\mathcal{G}(A)}$ ist <u>kein</u> Graph eines linearen Operators also A nicht abschließbar.
- A abschließbar $\Rightarrow A^* \overset{(i)}{=} \overline{A^*} \overset{(ii)\text{ für } A^*}{=} A^{***} \overset{(ii)\text{ für } A}{=} (\overline{A})^*$

□

Eine Anpassung der Definition an unbeschränkte Operatoren

3.10 Definition. Sei A dicht definierter, linearer Operator in $\mathcal{H}$, Resolventenmenge:

$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda\mathbb{1} : \mathrm{dom}(A) \to \mathcal{H}$ ist bijektiv und $(A - \lambda\mathbb{1}$[3]$)^{-1} \in \mathrm{BL}(\mathcal{H})\}$

$\mathrm{spec}(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$

3.11 Bemerkung. i) Für A dicht definiert gilt: $\rho(A) \neq \emptyset \Rightarrow A$ abgeschlossen (Übung!)

ii) Für A dicht definiert und abgeschlossen gilt:

$$A - \lambda\mathbb{1} \text{ bijektiv } \Rightarrow (A - \lambda\mathbb{1})^{-1} : \mathcal{H} \to \mathrm{dom}(A) \text{ ist beschränkt}$$

denn A abgeschlossen, $A - \lambda\mathbb{1}$ bijektiv $\Rightarrow (A - \lambda\mathbb{1})^{-1}$ abgeschlossen und $\mathrm{dom}((A - \lambda\mathbb{1})^{-1})$ abgeschlossen $\Rightarrow$ [4] Behauptung

Moral. nur abgeschlossene Operatoren sind interessant und dann braucht man die Stetigkeitsbedingung nicht extra zu formulieren.

Analog zum Fall beschränkter Operatoren gilt (ohne Beweis):

3.12 Satz. *Sei A dicht definierter, abgeschlossener linearer Operator in $\mathcal{H}$, dann gilt:*

- *$\rho(A)$ ist offen in $\mathbb{C}$*
- *$z \mapsto R_z(A)$ ist analytisch auf $\rho(A)$*
- *$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu)R_\mu(A)R_\lambda(A) = (\lambda - \mu)R_\lambda(A)R_\mu(A) \quad \forall \lambda, \mu \in \rho(A)$ 1. Resolventengleichung*
  Insbesondere kommutieren $R_\lambda(A)$ und $R_\mu(A)$. Die Wahl des Definitionsbereichs hat Einfluss auf das Spektrum eines Operators. Mehr dazu im nächsten Kapitel.

3.2 Symmetrische und selbstadjungierte Operatoren

3.13 Definition. Sei A dicht definierter, linearer Opertor in $\mathcal{H}$

i) A symmetrisch ($\equiv$ Hermitesch) $:\Leftrightarrow A \subseteq A^*$

ii) A selbstadjungiert $:\Leftrightarrow A = A^*$

3.14 Bemerkung.
- $(i) \Leftrightarrow \forall \phi, \psi \in \mathrm{dom}(A)$ gilt $\langle \psi, A\phi \rangle = \langle A\psi, \phi \rangle$
- $(ii) \Leftrightarrow A$ symmetrisch und $\mathrm{dom}(A^*) = \mathrm{dom}(A)$ d.h. $\{\psi \in \mathcal{H} : \exists \eta \equiv \eta_\psi \in \mathcal{H}$ mit $\langle \psi, A\phi \rangle = \langle \eta, \phi \rangle \, \forall \phi \in \mathrm{dom}(A)\} = \mathrm{dom}(A)$ (und nicht größer!)

[3] Resolvente $=: R_\lambda(A)$
[4] Satz vom abgeschlossenen Graphen

- A symmetrisch $\Rightarrow$ [5] A abschließbar, da $\mathrm{dom}(A^*) \supseteq$ [6] $\mathrm{dom}(A)$ und es gilt: $A \subseteq A^{**} = \overline{A} \subseteq A^*$ (abgeschlossen nach Satz 3.9) Falls A zudem abgeschlossen $\Rightarrow A = A^{**} \subseteq A^*$
- A selbstadjungiert $\Leftrightarrow$ A symmetrisch und abgeschlossen und $A = A^{**} = A^*$

3.15 Beispiel (vgl.Bsp. 3.3). $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$

(i) max. Multplikationsoperator Q, $\mathrm{dom}(Q) := \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 < \infty\}$ $Q : \psi \mapsto Q\psi$, $(Q\psi)(x) := x\psi(x)$
<u>Beh.:</u> Q ist selbstadjungiert.
<u>da:</u>

- $\mathrm{dom}(Q) \supseteq C_c^\infty(\mathbb{R})$ dicht in $L^2(\mathbb{R})$
- $\forall \psi \in \mathrm{dom}(Q)$, $\forall \psi \in L^2(\mathbb{R})$

$$\langle \psi, Q\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} dx \overline{\phi(x)} x \psi(x) = \int_{\mathbb{R}} dx \overline{\phi(x) x} \psi(x) = \langle \eta, \psi \rangle$$

mit η[7] $\in L^2(\mathbb{R})$. Funktioniert $\Leftrightarrow \phi \in \mathrm{dom}(Q) \Rightarrow Q^* = Q$

(ii) $\mathrm{dom}(D_{\min}) = C_c^\infty(\mathbb{R})$, $D_{\min} : \psi \mapsto i\psi'$
<u>Beh.:</u> $D_{\min}$ symmetrisch und $D_{\min}^* = D_{\max}$ [Erin.: $\mathrm{dom}(D_{\max}) = H^1(\mathbb{R})$]
<u>da:</u>

- $\mathrm{dom}(D_{\min})$ dicht in $L^2(\mathbb{R})$
- $\forall \psi \in \mathrm{dom}(D_{\min})$ $\forall \psi \in L^2(\mathbb{R})$ $\left\langle \phi, \underbrace{D_{\min}\psi}_{i\psi'} \right\rangle = -\left\langle i\phi, \psi' \right\rangle \stackrel{!}{=} \langle \eta, \psi \rangle$

  η existiert $\Leftrightarrow \phi \in H^1(\mathbb{R})$ und es gilt, dass $\eta = i\phi'$($\leftarrow$ schwach) d.h.: $\mathrm{dom}(D_{\min}^*) = H^1(\mathbb{R})$, $D_{\min}^* \phi = i\phi'$ insbesondere ist $D_{\max} = D_{\min}$ abgeschlossen (vlg: Übungsaufgabe (Satz 3.9 (i))[8])

3.16 Definition. Sei $A : \mathrm{dom}(A) \to \mathcal{H}$ symmetrisch

- A <u>wesentlich selbstadjungiert</u> $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ ist selbstadjungiert ($\stackrel{S.3.9}{\Longleftrightarrow} A^{**} = A^*$)
- Sei A abgeschlossen. $\mathcal{D} \subseteq \mathrm{dom}(A)$ heißt <u>determinierender Bereich</u> ("core") für A $\Leftrightarrow$ $\overline{A|_{\mathcal{D}}} \subseteq A$

3.17 Bemerkung. (i) A wesentlich selbstadjungiert $\Leftrightarrow \exists_1$ selbstadjungierte Erweiterung zu A, d.h. die selbstadjungierte Erweiterung $\overline{A}$ ist bereits eindeutig durch A bestimmt (praktisch falls $\mathrm{dom}(\overline{A})$ nicht bekannt!)

(ii) A selbstadjungiert und $\mathcal{D}$ ein core für A $\Rightarrow A|_{\mathcal{D}}$ ist wesentlich selbstadjungiert.

(iii) <u>Bsp:</u> $D_{\min}$ ist wesentlich selbstadjungiert

[5] Satz 3.9 (ii)
[6] dicht
[7] $\eta(x) := x\phi(x)$
[8] NB: $C_C^\infty(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{dom}(Q), \mathrm{dom}(D_{\min} \Rightarrow$ dicht in $L^2(\mathbb{R})$

Kriterien für Selbstadjungiertheit:

3.18 Satz. *Sei* $A : \mathrm{dom}(A) \to \mathcal{H}$ *symmetrisch. Dann sind äquivalent:*

i) $A = A^*$

ii) A *ist abgeschlossen und* $\ker(A^* \pm i) = \{0\}$ *(d.h. falls* $A^*\phi = \pm i\phi$ *für ein* $\phi \in \mathcal{H} \Rightarrow \phi = 0$*)*

iii) $\mathrm{ran}(A \pm i) = \mathcal{H}$

Beweis.

"$(i) \Rightarrow (ii)$" $A = A^* \overset{\text{Satz 3.9}}{\Longrightarrow} \overline{A} = A^{**} = A$, d.h. A ist abgeschlossen.
Sei $\underbrace{A^*\phi = i\phi}_{A\phi = i\phi}$ für ein $\phi \in \mathrm{dom}(A^*)$

$\Rightarrow i\,\langle \phi, \phi \rangle = \left\langle \phi, \underbrace{i\phi}_{A^*\phi} \right\rangle = \langle A\phi, \phi \rangle = -i\,\langle \phi, \phi \rangle$ (analog für $\ker(A^* + i)$)
$\|\phi\| = 0 \Rightarrow \phi = 0$

"$(ii) \Rightarrow (iii)$" 1.Akt: Es gilt: $\boxed{\ker(A^* \pm i) = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{ran}(A \mp i) \text{ dicht in } \mathcal{H}}$

Beweis. Sei $\phi \in \{\mathrm{ran}(A \mp i)\}^{\perp} \Leftrightarrow \forall \phi \in \mathrm{dom}(A)\ \langle (A \mp i)\phi, \psi \rangle = 0 = \langle \phi, 0 \rangle$
$\Leftrightarrow \psi \in \mathrm{dom}(A^*)$ und $(A^* \pm i)\psi = 0 \Leftrightarrow \psi \in \ker(A^* \pm i)$ □

2.Akt: Wir zeigen: $\mathrm{ran}(A \pm i)$ abgeschlossen ($\Rightarrow$ Behauptung!) o.E. nur für "$-$" für "$+$" analog. Sei $\psi \in \mathrm{dom}(A)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \|(A-i)\,\psi\|^2 &= \langle (A-i)\psi, (A-i)\psi \rangle \\
&= \|A\psi\|^2 + \|\psi\|^2 + i \underbrace{\left(\underbrace{\langle \psi, A\psi \rangle}_{\langle A\psi, \psi \rangle} - \langle A\psi, \psi \rangle \right)}_{0} \\
&\geq \|\psi\|^2 \ (*)
\end{aligned}$$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} (A-i)^{-1} : \mathrm{ran}(A-i) \to \mathrm{dom}(A)$ existiert und ist stetig.
Nun sei $(\phi_n)_n \subset \mathrm{dom}(A)$ mit $(A-i)\phi_n \xrightarrow{n\to\infty} \eta \in \overline{\mathrm{ran}(A-i)}$
$\Rightarrow ((A-i)\phi_n)_n$ ist Cauchy $\overset{(*)}{\Rightarrow} (\phi_n)_n$ Cauchy. $\Rightarrow \exists \psi \in \mathcal{H}$: $\phi_n \xrightarrow{n\to\infty} \psi$
$\Rightarrow A\phi_n \xrightarrow{n\to\infty} \eta + i\psi \Rightarrow$ [9] $(\psi, \eta + i\psi) \in \mathcal{G}(A) \Rightarrow \psi \in \mathrm{dom}(A)$ und $A\psi = \eta + i\psi \Rightarrow (A-i)\psi = \eta \in \mathrm{ran}(A-i) \Rightarrow (A-i)$ abgeschlossen.

"$(iii) \Rightarrow (i)$" Sei $\phi \in \mathrm{dom}(A^*)$. Wegen (iii) $\exists \psi \in \mathrm{dom}(A) : (A^* - i)\phi = (A-i)\psi \overset{A^* \supseteq A}{\Longrightarrow} (A^* - i)(\phi - \psi) = 0$. Somit $\forall \eta \in \mathrm{dom}(A)$
$0 = \langle \eta, (A^* - i)(\phi - \psi) \rangle = \langle (A+i)\eta, \phi - \psi \rangle$ wegen (iii) ist $\{(A+i)\eta : \eta \in \mathrm{dom}(A)\} = \mathcal{H} \Rightarrow \phi = \psi \in \mathrm{dom}(A) \Rightarrow A^* = A$

□

[9] A abgeschlossen

3.19 Korollar. *Sei $A : \mathrm{dom}(A) \to \mathcal{H}$ symmetrisch. Dann sind äquivalent:*

i) *A ist wesentlich selbstadjungiert*

ii) $\ker(A^* \pm i) = \{0\}$

iii) $\mathrm{ran}(A \pm i)$ *dicht in* $\mathcal{H}$

Beweis.

"$(i) \Leftrightarrow (ii)$" wende Satz 3.18 auf $\overline{A}$ an (NB: $\overline{A}^* = A^*$(

"$(ii) \Leftrightarrow (iii)$" vgl. 1. Akt im Beweis von $(ii) \Rightarrow (iii)$ von Satz 3.18

□

3.3 Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren

Warnung. *Es gibt keinen Spektralsatz oder Funktionalkalkül für allgemeine symmetrische Operatoren - selbstadjungiert ist entscheidend [vgl. auch Bemerkung 3.11 (i): A nicht abgeschlossen, dicht definiert* $\Rightarrow \mathrm{spec}(A) = \mathbb{C}$*]*

3.20 Lemma. *Sei $A : \mathrm{dom}(A) \to \mathcal{H}$ symmetrisch und abgeschlossen. Dann gilt: A selbstadjungiert* $\Leftrightarrow \mathrm{spec}(A) \subseteq \mathbb{R}$

Beweis. $z := \lambda + i\mu,\ \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \tilde{A} := \frac{1}{\mu}(A - \lambda),\ \mathrm{dom}(\tilde{A}) := \mathrm{dom}(A)$
$\Rightarrow \forall \psi \in \mathrm{dom}(A)\ \|(A - z)\psi\|^2 = \mu^2 \underbrace{\left\|(\tilde{A} - i)\psi\right\|^2}_{\left\|\tilde{A}\psi\right\|^2 + \|\psi\|^2}$ [10] $\geq \mu^2 \|\psi\|^2$

$\Rightarrow (A - z)^{-1} : \underbrace{\mathrm{ran}(A - z)}_{\mathrm{ran}(\tilde{A} - i)} \to \mathrm{dom}(A)$ existiert und ist stetig(1). Somit gilt:

$A = A^* \Leftrightarrow \tilde{A} = \tilde{A}^* \overset{\text{Satz 3.18}}{\Leftrightarrow} \mathrm{ran}(\tilde{A} - i) = \mathcal{H} \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} z \in \rho(A) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ □

3.21 Satz (Spektralsatz in Multiplikationsoperatorform)**.** *Sei $A : \mathrm{dom}(A) \to \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Dann $\exists$ Maßraum (Λ, Σ, μ), $\sigma : \Lambda \to \mathbb{R}$ messbar, sowie $U : \mathcal{H} \to L^2(\Lambda)$ unitär, so dass*

a) $\psi \in \mathrm{dom}(A) \Leftrightarrow \sigma \cdot U\psi \in L^2(\Lambda)$

b) $UAU^* = M_\sigma$ *mit* $\mathrm{dom}(M_\sigma) := \{f \in L^2(\Lambda) : \sigma f \in L^2(\Lambda)\}$

[Falls $\mathcal{H}$ separabel, so kann (Λ, Σ, μ) σ-endlich gewählt werden.]

3.22 Bemerkung. M_σ ist selbstadjungierter Multiplikationsoperator mit Funktion σ auf maximalem Definitionsbereich (vgl. Bsp. 3.15(i)).

Beweis von Satz 3.21. Strategie: Rückfüllung auf Spektralsatz für beschränkte, normale Operatoren.
Lemma 3.20 $\Rightarrow -i \in \rho(A)$, d.h. $R := (A + i)^{-1} \in \mathrm{BL}(\mathcal{H})$ existiert.
Behauptung: $R^* = (A - i)^{-1}$, insbesondere R normal (Satz 3.12)

[10] (*)Beweis $(ii) \Rightarrow (iii)$ in Satz 3.18

Beweis: Satz 3.18 $\Rightarrow \forall \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}\ \exists \phi_1, \phi_2 \in \mathrm{dom}(A)$ mit $(A-i)\phi_1 = \psi_1$ und $(A+i)\phi_2 = \psi_2$
$\Rightarrow \langle \psi_1, R\psi_2 \rangle = \langle (A-i)\psi_1, \psi_2 \rangle = \langle \phi_1, (A+i)\phi_2 \rangle = \left\langle (A-i)^{-1}\psi_1, \psi_2 \right\rangle$
$\Rightarrow$ Spektralsatz für beschränkte, normale Operatoren: $\exists$ Maßraum (Λ, Σ, μ), $\exists g : \Lambda \to \mathbb{C}$ messbar, beschränkt und $\exists U : \mathcal{H} \to L^2(\Sigma)$ unitär mit $URU^* = M_g$ auf $L^2(\Lambda)$
"Basteln von $A = \frac{1}{R} - i$":
A injektiv $\Rightarrow M_g$ injektiv $\Rightarrow \{\lambda \in \Lambda : g(\lambda) = 0\}$ ist μ-Nullmenge $\Rightarrow \sigma(\lambda) := \frac{1}{g(\lambda)} - i$ ist μ–f.ü. definiert auf Λ

zu a): "$\Rightarrow$" $\psi \in \mathrm{dom}(A) \Rightarrow \exists \phi \in \mathcal{H} : \psi = R\phi \Rightarrow \boxed{U\psi = UR\phi = URU^*U\phi = gU\phi}$
$\Rightarrow \sigma \cdot U\psi = \underbrace{\sigma g}_{\in L^\infty(\Lambda)} \underbrace{U\phi}_{\in L^2(\Lambda)} \in L^2(\mathbb{R})$

"$\Leftarrow$" Sei $\sigma \cdot U\psi \in L^2(\Lambda)$ für $\psi \in \mathcal{H}$
$\Rightarrow \exists \phi \in \mathcal{H}$ mit $U\phi = (\sigma + i)U\psi$
$\Rightarrow gU\phi = U\psi \in L^2(\Lambda)$
$\Rightarrow \psi = U^* M_g U\phi = R\phi \in \mathrm{dom}(A)$

zu b): nach (a) gilt: $U\,\mathrm{dom}(A) = \mathrm{dom}(M_\sigma)$. Sei $\psi \in \mathrm{dom}(A)$
$\Rightarrow \exists \phi \in \mathcal{H}$ mit $\psi = R\phi$

$$\Rightarrow A\psi = \phi - i\psi \text{ und } UA\psi = \underbrace{U\phi}_{\frac{1}{g}U\psi} - iU\psi = \left(\frac{1}{g} - i\right) U\psi = M_\sigma U\psi \in L^2(\Lambda)$$

$\Rightarrow UAU^* = M_\sigma$ auf $\mathrm{dom}(M_\sigma)$

□

3.23 Satz (Messbarer Funktionalkalkül)**.** *Sei $A : \mathrm{dom}(A) \to \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Dann $\exists_1 \hat{\Phi} : \mathbb{B}(\mathbb{R}) \to \mathrm{BL}(\mathcal{H})$, so dass:*

*a) $\hat{\Phi}$ ist *-Algebren-Homomorphismus*

b) $\hat{\Phi}$ stetig und $\left\|\hat{\Phi}(h)\right\| \leq \|h\|_\infty\ \forall h \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$

c) Falls $(h_n)_n \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit $\lim_{n\to\infty} h_n(\lambda) = \lambda\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ und $|h_n(\lambda)| \leq \lambda\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\phi}(h_n)\psi = A\psi \quad \forall \psi \in \mathrm{dom}(A)$$

d) Falls $(h_n)_n \subset \mathbb{R}$ mit $h_n \xrightarrow{n\to\infty} h$ punktweise und $\sup_n \|h_n\|_\infty < \infty$, dann gilt:

$$\hat{\Phi}(h_n) \xrightarrow{n\to\infty} \hat{\Phi}(h) \text{ stark}$$

e) Falls $A\psi = \lambda\psi$, dann $\hat{\Phi}(h)\psi = h(\lambda)\psi \quad \forall h \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$

f) Falls $h \geq 0$, dann $\hat{\Phi}(h) \geq 0$

Notation. $h(A) \equiv \hat{\Phi}(h)$

Beweisidee: Für $h \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ verwende Satz 3.21 und setze $h(A) := U^* M_{h \circ \sigma} U \in \mathrm{BL}(\mathcal{H})$ □

3.24 Lemma. *Sei $A : \mathrm{dom}(A) \to \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Dann definiert. $p : \mathbb{B} \to$ Orthogonalprojektoren auf $\mathcal{H}$, $B \mapsto \chi_B(A) =: P(B)$ ein Projektorwertiges Maß, das Spektralmaß zu A.*

Beweis. (einfache) Übung! □

3.25 Bemerkung. Das Spektralmaß zu A hat i.A. keinen kompakten Träger, d.h. i.A. $\nexists K \subset \mathbb{R}$ kompakt mit $\chi_K(A) = \mathbb{1}$ (Im Gegensatz zu Kapitel 1)

3.26 Satz (Spektralsatz)**.** *$\exists$ 1-zu-1-Zuordnung zwischen selbstadjungierten Operatoren A auf $\mathcal{H}$ und Spektralmaßen P auf $\mathcal{H}$, für die gilt:*

$$A = \int_{\mathbb{R}} dP(\lambda)\lambda \quad \mathrm{dom}(A) := \left\{ \psi \in \mathcal{H} : \int_{\mathbb{R}} d\mu_\psi(\lambda)\lambda^2 < \infty \right\} \quad \mu_\psi := \langle \psi, P(\cdot)\, \psi \rangle$$

sowie $P := \chi_\cdot(A)$. Weiterhin ist $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Borel-messbar (nicht notwendigerweise beschränkt).

$$f(A) := \int_{\mathbb{R}} dP(\lambda) f(\lambda) \tag{3.1}$$

$$\mathrm{dom}(f(A)) := \left\{ \psi \in \mathcal{H} : \int_{\mathbb{R}} d\mu_\psi(\lambda)\, |f(\lambda)|^2 < \infty \right\} \tag{3.2}$$

normal mit $(f(A))^* = \overline{f}(A)$. Spezifalfälle:

- *f reellwertig $\Rightarrow$ $f(A)$ selbstadjungiert*
- *f beschränkt $\Rightarrow$ $f(A)$ stimmt mit messbarem Funktionalkalkül überein.*

Beweisidee.
- selbstadjungierter Operator $\to$ Spektralmaß; siehe Lemma 3.24
- Spektralmaß $\to$ selbstadjungierter Operator:

  i) sei $\mu_{\phi,\psi} := \langle \phi, P(\cdot)\, \psi \rangle \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} d\mu_{\phi,\psi}(\lambda) f(\lambda)$ wohldefiniert $\forall \phi \in \mathcal{H}\ \forall \psi \in \mathrm{dom}(f(A))$ wie in 3.2, da für $f = \sum_j \alpha_j \chi_{B_j}$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_j \mu_{\phi,\psi}(B_j)\alpha_j \right| &\le \sum_j \mu_{\phi,\phi}(B_j)^{\frac{1}{2}} \mu_{\psi,\psi}(B_j)^{\frac{1}{2}} |\alpha_j| \\ &\le \left(\underbrace{\sum_j \mu_{\phi,\phi}(B_j)}_{\le 1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\underbrace{\sum_j \mu_{\psi,\psi}(B_j)\, |\alpha_j|^2}_{\int_{\mathbb{R}} d\mu_\psi(\lambda)|f(\lambda)|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

  (allgemeiner Fall folgt durch Approximation)
  $\Rightarrow$ definiere Operator $f(A)$ via $\langle \phi, f(A)\psi \rangle := \int_{\mathbb{R}} d\mu_{\phi,\psi}(\lambda) f(\lambda)$

ii) $\mathrm{dom}(f(A))$ dicht in $\mathcal{H}$: für $n \in \mathbb{N}$, sei $K_n := \{\lambda \in \mathbb{R} : |f(\lambda)| \in [n-1, n[\}$
$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} P(K_n) = \mathbb{1}$(starke Konvergenz), *d.h.* $\underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{ran}(P(K_n))}_{\subseteq \mathrm{dom}(f(A))}$ dicht in $\mathcal{H}$

iii) $\mathrm{dom}(f(A))$ ist maximaler Definitionsbereich:

$$\|f(A)\psi\|^2 = \langle f(A)\psi, f(A)\psi\rangle = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} d\mu_{f(A)\psi,\psi}(\lambda) f(\lambda)}_{\sum_j \mu_{f(A)\psi,\psi}(B_j)\alpha_j}$$

für $f = \sum_j \alpha_j \chi_{B_j}$ gilt:

$$\mu_{f(A)\psi,\psi}(B_j) = \langle f(A)\psi, P(B_j)\psi\rangle = \overline{\alpha}_j \langle \psi, P(B_j)\psi\rangle$$

$\Rightarrow \|f(A)\psi\|^2 = \sum_j \mu_\psi(B_j)|\alpha_j|^2 = \int_{\mathbb{R}} d\mu_\psi(\lambda)|f(\lambda)|^2$ gilt mittels Approximationsargument für beliebiges $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ messbar.

iv) $(f(A))^* = \overline{f}(A)$, da

$$\langle \phi, f(A)\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} d\mu_{\phi,\psi}(\lambda) f(\lambda) = \overline{\int_{\mathbb{R}} d\mu_{\phi,\psi}(\lambda)\overline{f(\lambda)}}$$
$$\overset{\text{iii)}:\overline{f}(A)\phi\in\mathcal{H}\Leftrightarrow\phi\in\mathrm{dom}(f(A))}{=} \overline{\langle \psi, \overline{f}(A)\phi\rangle} = \langle \overline{f}(A)\phi, \psi\rangle$$

□

3.4 Quadratische Formen und selbstadjungierte Erweiterungen

Ziel. *Finde zu einem positiven, symmetrischen Operator eine selbstadjungierte Erweiterung.*

3.27 Definition. Sei $Q \subseteq \mathcal{H}$ dichter Teilraum. $q : Q \times Q \to \mathbb{C}, (\phi, \psi) \mapsto q(\phi, \psi)$ sesquilinear (semi-linear links) heißt quadratische Form mit <u>Formdefinitionsbereich Q</u> (auf Q).

- q <u>symmetrisch</u> $:\Leftrightarrow q(\phi, \psi) = \overline{q(\psi, \phi)} \quad \forall \phi, \psi \in Q$
- q <u>positiv</u>(besser: nicht negativ) : $\Leftrightarrow q(\phi, \phi \geq 0 \quad \forall \phi \in Q$
- q <u>halbbeschränkt</u>(mit Konstante $M \geq 0$) $:\Leftrightarrow q(\phi, \phi) \geq -M \|\phi\|^2 \quad \forall \phi \in Q$

(positiv $\Rightarrow$ halbbeschränkt $\Rightarrow$ symmetrisch, falls $\mathcal{H}$ Hilbertraum über $\mathbb{C}$)

- Sei q halbbeschränkt mit Konstante $M \geq 0$.
  q <u>abgeschlossen:</u>$\Leftrightarrow$ Q ist vollständig bzgl. der Norm

$$|||\psi||| := \left(q(\psi, \psi) + (M+1)\,|||\psi|||^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

- Sei q abgeschlossen und $\mathcal{D} \subseteq Q$, $\mathcal{D}$ ist <u>Form core</u> von q $:\Leftrightarrow \overline{D}^{|||\cdot|||} = Q$

3.28 Lemma. *Sei q eine halbbeschränkte quadratische Form auf Q. Dann gilt: q abgeschlossen $:\Leftrightarrow \forall (\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Q$ mit $\phi_n \xrightarrow{n\to\infty} \phi \in \mathcal{H}$ und $q(\phi_n - \phi_m, \phi_n - \phi_m) \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$ gilt: $\phi \in Q$ und $q(\phi - \phi_n, \phi - \phi_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$*

Beweis. Vorraussetzung rechts besagt: $(q_n)_n$ Cauchy bzgl. $|||\cdot|||$ □

3.29 Lemma. *Sei $A : \mathrm{dom}(A) \to \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Dann definiert:*

$$Q_A := \left\{ \psi \in \mathcal{H} : \int_\Lambda d_\mu(\lambda)\, |\sigma(\lambda)|\, |(U\psi)(\lambda)|^2 < \infty \right\}$$

$$q_A(\phi,\psi) := \int_\Lambda d_\mu(\lambda) \sigma(\lambda) \overline{(U\phi)(\lambda)} (U\psi)(\lambda) \quad \forall \phi,\psi \in Q_A$$

die A zugeordnete quadratische Form mit $Q_A \supseteq \mathrm{dom}(A)$. Falls $A \geq -M\mathbb{1}$ für ein $M \geq 0 \Rightarrow q_A$ ist halbbeschränkt (mit Konstante M) und abgeschlossen. Jeder (Operator-)Core von A ist Form core von q_A. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} Q_A &= \mathrm{dom}\left((A+M)^{\frac{1}{2}}\right) \\ q_A(\phi,\psi) &= \left\langle (A+M)^{\frac{1}{2}} \phi, (A+M)^{\frac{1}{2}} \psi \right\rangle - M \langle \phi, \psi \rangle \quad \forall \phi,\psi \in Q_A \\ \textit{Insb. } q_A(\phi,\psi) &= \langle \phi, A\psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathrm{dom}(A)\ \forall \phi \in Q_A \end{aligned}$$

Beweis.
- q_A wohldefinierte, symmetrische, quadratische Form auf Q_A nach Cauchy-Schwarz. Da $|\sigma(\lambda)| \leq 1 + |\sigma(\lambda)|^2 \Rightarrow \mathrm{dom}(A) \subseteq Q_A$ dicht!
- Für den Rest sei o. E. $M = 0$ (ansonsten ersetze in Beweis $A \to A + M, q \to q(\cdot,\cdot) + M\langle \cdot,\cdot \rangle$)
  $A \geq 0 \Rightarrow \sigma(\lambda) \geq 0$ μ-f.ü. $\Rightarrow q_A(\psi,\psi) \geq 0 \checkmark$

  1) $|||\psi|||^2 \leq \|\psi\|^2 + \underbrace{\|\psi\|\,\|A\psi\|}_{\frac{1}{2}\|\psi\|^2 + \frac{1}{2}\|A\psi\|^2} \leq \frac{3}{2}\left(\|\psi\|^2 + \|A\psi\|^2\right)\ \forall \psi \in \mathrm{dom}(A)$

  2)
  $$\mathrm{dom}(A^{\frac{1}{2}}) = Q_A \qquad q_A(\phi,\psi) = \left\langle A^{\frac{1}{2}}\phi, A^{\frac{1}{2}}\psi \right\rangle \forall \phi,\psi \in Q_A$$

  (Funktionalkalkül in Multiplikationsoperatorform (Satz 3.23)
  Insbesondere: $|||\phi|||^2 = \|\phi\|^+ \left\| A^{\frac{1}{2}} \phi \right\|^2$
- Somit q_A abgeschlossen, da (2) und $|||\cdot||| =$ Graphennorm des abgeschlossenen Operators $A^{\frac{1}{2}}$
- Sei $\mathcal{D}$ Operator-core von A $\Rightarrow \mathcal{D}$ dicht in $\mathrm{dom}(A)$ bzgl. $\left(\|\cdot\|^2 + \|A\cdot\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \overset{1}{\Rightarrow}$ auch dicht bzgl. $|||\cdot|||$. Somit folgt $\mathcal{D}$ form core von q_A aus:
  <u>Behauptung:</u> $\overline{\mathrm{dom}(A)}^{|||\cdot|||} = Q_A$
  <u>Beweis:</u> Sei $q \in Q_A,\ K_n := \{\lambda \in \Lambda : \sigma(\lambda) \in [0,n[\}$
  $\Rightarrow \int_\Lambda d\mu(\lambda)\sigma(\lambda)^2 \left|\chi_{K_n}(A)(U\phi)(\lambda)\right|^2 < \infty$
  $\Rightarrow \underbrace{U^* M_{K_n} U\phi}_{=:\phi_n} \in \mathrm{dom}(A)$ und $|||\phi - \phi_n|||^2 = \int_\Lambda d\mu(\lambda)\,(1+\sigma(\lambda))\,(1 - \chi_{K_n}(\lambda))\,|U\phi(\lambda)|^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (dominierte Konvergenz)

□

3.30 Beispiel. $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ $Q := C_C^\infty(\mathbb{R})$, $q(\phi, \psi) := \overline{\phi(0)}\psi(0)$ ist symmetrische, positiv definite Form. Aber: q ist nicht abgeschlossen und besitzt auch keine abgeschlossene Erweiterung $\tilde{q}|_Q = q, \tilde{Q} \subseteq Q$,
da:

- $\phi_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \in Q$ in $L^2(\mathbb{R})$
- $q(\phi_n - \phi_m, \phi_n - \phi_m) = 0 \ \forall n, m \in \mathbb{N}$
- $q(\phi_n - 0, \phi_n - 0) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \nexists$ selbstadjungierter Operator A mit $\mathrm{dom}(A) \supset C_C^\infty(\mathbb{R})$:

$$\langle \phi, A\psi \rangle = \overline{\phi(0)}\psi(0) \quad \forall \phi, \psi \in C_C^\infty(\mathbb{R})$$

Moral.
- Ein Halbbeschränkter Operator A hat immer eine abgeschlossene Erweiterung $A^{'}$ aber nicht notwendigerweise eine selbstadjungierte Erweiterung.
- Eine Halbbeschränkte, quadratische Form hat nicht notwendigerweise eine abgeschlossene Erweiterung; falls aber doch, dann gilt die Umkehrung von Lemma 3.28

3.31 Satz. *Sei q abgeschlossene, hablbbeschränkte, quadratische Form auf* $Q \subseteq \mathcal{H}$. *Dann* $\exists_1 A : \mathrm{dom}(A) \to \mathcal{H}$ *selbstadjungiert mit* $\mathrm{dom}(A) \subseteq Q$, $\overline{\mathrm{dom}(A)}^{|||\cdot|||} = Q$ *und* $q(\phi, \psi) = \langle \phi, A\psi \rangle \quad \forall \phi, \psi \in \mathrm{dom}(A)$

Beweis. o.E. sei $q \geq 0$ (sonst ersetze q durch $\tilde{q} := q + M \langle \cdot, \cdot \rangle$)

- q symmetrisch $\Rightarrow \langle\langle \phi, \psi \rangle\rangle := q(\phi, \psi) + \langle \phi, \psi \rangle$ ist Skalarprodukt auf Q
- q abgeschlossen $\Rightarrow$ Q ist Hilbert-Raum bzgl. $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$

i) Die kanonischen Einbettungen

$$\underbrace{(Q, \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle)}_{=:\mathbb{H}} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{H} \overset{j}{\hookrightarrow} (Q, \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle)^* = \mathbb{H}^*$$

$i(\phi) := \phi \quad \forall \phi \in Q \quad j(\psi) := \langle \psi, \cdot \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{H}$ sind (semi-) linear, injektiv (i:klar, j: da $\overline{Q}^{|||\cdot|||} = \mathcal{H}$) und stetig.
da:

- $\|i(\phi)\| = \|\phi\| \leq |||\phi||| := \langle\langle \phi, \phi \rangle\rangle$
- $$\|j(\psi)\|_{Q^*} := \sup_{0 \neq \phi \in Q} \frac{|(j(\psi))(\phi)|}{|||\phi|||} = \sup_{n \neq \phi \in Q} \frac{|\langle \phi, \phi \rangle|}{|||\phi|||}$$
  $$\overset{C.S.}{\leq} \|\psi\| \sup_{0 \neq \phi \in Q} \frac{\|\phi\|}{|||\phi|||} \leq \|\psi\|$$

Definiere linearen Operator: Riesz-Darstellung:
$l : \mathbb{H} \to \mathbb{H}^*, \phi \mapsto l(\phi) := \langle\langle \phi, \cdot \rangle\rangle$ ist anti-unitär (semi-linear, bijektiv, isometrisch). Definiere linearen Operator:

$$\boxed{B : \mathrm{dom}(B) := \{\phi \in \mathbb{H} : l(\phi) \in \mathrm{ran}(j)\} \to \mathcal{H}, \phi \mapsto (j^{-1} \circ l)\phi}$$

somit $\mathbb{H} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{H} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{H}^* \underset{\leftarrow l^{-1}}{\xrightarrow{\to l}} \mathbb{H}$ Bemerke: j ist injektiv, denn:

$$\langle \psi_1, \eta \rangle = \langle \psi_2, \eta \rangle \ \forall \eta \in \mathbb{H} \Rightarrow \langle \psi_1 - \psi_2, \eta \rangle = 0$$

$\Rightarrow^{11} \psi_1 = \psi_2$

ii) $\overline{\mathrm{dom}(B)}^{|||\cdot|||} = \mathcal{H}$, da:

- ran(j) dicht in $\mathbb{H}^*$ (bzgl. Dualraum-Norm), da sonst $\exists 0 \neq F \in \mathbb{H}^*$, so dass $\forall \psi \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} 0 = \langle\langle j(\psi), F \rangle\rangle_{\mathbb{H}^*} &\overset{\text{Riesz}}{=} \left\langle\left\langle l^{-1}(j(\psi), \underbrace{l^{-1}(F)}_{=:\eta_F} \right\rangle\right\rangle \\ &=^{12} \left[l\left(l^{-1}\left(j(\psi)\right)\right)\right](\eta_F) \\ &= [j(\psi)](\eta_F) \\ &= \langle \psi, \eta_F \rangle \end{aligned}$$

  $\Rightarrow \eta_F = 0 \Rightarrow F = 0$

- l anti-unitär $\Rightarrow l^{-1}(\mathrm{ran}\, j)$ dicht in $\mathbb{H}$ bzgl. $|||\cdot||| \Rightarrow$ dicht in $\mathbb{H}$ bzgl. $\|\cdot\|$, da $\|\cdot\| \leq |||\cdot||| \Rightarrow$ dicht in $\mathcal{H}$ bzgl. $\|\cdot\|$, da $\mathbb{H}$ dicht in $\mathcal{H}$ bzgl. $\|\cdot\|$

iii) $B \subseteq B^*$ (symmetrisch), da $\forall \phi, \psi \in \mathrm{dom}(B)$

$$\begin{aligned} \langle \psi, B\phi \rangle = \left\langle \psi, j^{-1}(l(\phi)) \right\rangle &= \underbrace{\overline{\langle j^{-1}(l(\phi)), \psi \rangle}}_{\left[\underbrace{j\left(j^{-1}(l(\phi))\right)}_{l(\phi)}\right](\psi)} \\ &= \overline{\langle\langle \phi, \psi \rangle\rangle} = \langle\langle \psi, \phi \rangle\rangle \ (*) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle B\psi, \phi \rangle = \overline{\langle \phi, B\psi \rangle} \overset{(*) \text{ mit } \phi \leftrightarrow \psi}{=} \overline{\langle\langle \phi, \psi \rangle\rangle} = \langle\langle \psi, \phi \rangle\rangle$$

iv) $B = B^*$, da: definiere $C := l^{-1} \circ j : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ist symmetrisch, da $\forall \phi, \psi \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \langle \phi, C\psi \rangle = \left\langle \phi, (l^{-1} \circ j)\psi \right\rangle &= [j(\phi)]\left(\left(l^{-1} \circ j\right)(\psi)\right) \\ &= \left\langle\left\langle (l^{-1} \circ j)\phi, (l^{-1} \circ j)\psi \right\rangle\right\rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ symmetrisch wie in (iii), da dom(C) $\subset \mathcal{H} \Rightarrow C$ selbstadjungiert und beschränkt (Hellinger-Töplitz, Korollar I.4.18)

[11] H dicht in $\mathcal{H}$ bzgl. $\|\cdot\|$

$\Rightarrow$ Spektralsatz in Multikplikationsoperatorform:

$$UCU^* = M_\sigma$$
$$U : \mathcal{H} \to L^2(\Lambda, \mu) \text{ unitär}$$
$$\sigma : \Lambda \to \mathbb{R} \text{ messbar, beschränkt}$$

C injektiv $\Rightarrow$

- $\{\lambda \in \Lambda : \sigma(\lambda) = 0\}$ ist $\mu-$Nullmenge
- $C^{-1} : \mathrm{ran}(C) \to \mathcal{H}$ surjektiv
- $UC^{-1}U^* = M_{\frac{1}{\sigma}}$ auf $U(\mathrm{ran}(C))$ selbstadjungiert, da $\mathrm{ran}(C) = \mathrm{dom}(B)$ dicht in $\mathcal{H}$ nach $(ii) \Rightarrow U(\mathrm{ran}(C))$ dicht in $L^2(\Lambda, \mu)$ und maximaler Definitionsbereich von $M_{\frac{1}{\sigma}}$ da C^{-1} surjektiv.
  $\Rightarrow B = C^{-1}$ selbstadjungiert

v) $\boxed{A : \mathrm{dom}(B) \to \mathcal{H},\ A := B - \mathbb{1}}$ selbstadjungiert und

$$\boxed{\langle \psi, A\phi \rangle \overset{*)}{=} \langle\langle \psi, \phi \rangle\rangle - \langle \psi, \phi \rangle = q(\psi, \phi)} \quad \forall \phi, \psi \in \mathrm{dom}(B) \subseteq Q$$

d.h. $q|_{\mathrm{dom}(A) \times \mathrm{dom}(B)} = \langle \cdot, A \cdot \rangle$

vi) Eindeutigkeit: Übung (benutze Lemma 3.29)

□

3.32 Beispiel.

$$Q_N := H^1(]0,1[),\ q_N(\phi, \psi) := \left\langle \phi', \psi' \right\rangle \leftrightarrow A_n \equiv \Delta_N$$
$$\mathcal{D}_N := \{\phi \in C^\infty(]0,1[) : \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \to 1}} \phi'(x) = 0\} \subset L^2(]0,1[)$$
$$\Delta_N \phi = -\phi'' \ \forall \phi \in \mathcal{D}_N$$
$$Q_D = H_0^1(]0,1[) = \overline{C_c^\infty(]0,1[)}^{|||\cdot|||_{1,2}},\ q_D(\phi, \psi) = \left\langle \phi', \psi' \right\rangle \to A_D \equiv \Delta_D$$
$$\mathcal{D}_D := \{\phi \in C^\infty(]0,1[) : \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \to 1}} \phi(x) = 0\} \text{ core}$$

Beweis. z.B.: Reed, Simon, Band 4, S. 264 □

3.33 Bemerkung. Beachte:

- A,B selbstadjungiert mit $A \subseteq B \Rightarrow A = B$ (da $B = B^* \subseteq A^* = A$)
- q_a, q_b zwei abgeschlossene, halbbeschränkte, quadratische Formen mit $Q_b \supseteq Q_a$ (d.h. $q_a \subseteq q_b$) $\not\Rightarrow q_a = q_b$ falsch i.A. (vgl. q_D, q_N))

Satz 3.31 setzt Abgeschlossenheit der Form vorraus. Halbbeschränkte Operatoren erzeugen abschließbare Formen $\Rightarrow$ haben selbstadjungierte Erweiterung:

3.34 Satz (Friedrichserweiterung). *Sei $A : \mathrm{dom}(A) \to \mathcal{H}$ symmetrisch, $A \geq -M\mathbb{1}$ für ein $M \geq 0$. Dann ist die zugehörige quadratische Form*

$$q_A : \mathrm{dom}(A) \times \mathrm{dom}(A) \to \mathbb{C}, (\phi, \psi) \mapsto \langle \phi, A\psi \rangle$$

abschliessbar mit Formabschluss $\tilde{q}$, $\tilde{Q} := \overline{\mathrm{dom}(A)}^{|||\cdot|||}$, als stetige Fortsetzung von q. Für den nach Satz 3.31 der abgeschlossenen, halbbeschränkten Form $\tilde{q}$ zugeordneten selbstadjungierten Operator $\tilde{A}$ gilt:

- *$\tilde{A}$ halbbeschränkt (mit gleicher Konstante wie A)*
- *$\tilde{A} \supseteq A$*
- *$\overline{A}$ ist die einzige selbstadjungierte Erweiterung von A mit $\mathrm{dom}(\tilde{A}) \subseteq \tilde{Q}$ und $\tilde{q}(\phi, \psi) = \left\langle \phi, \tilde{A}\psi \right\rangle$ $\forall \phi, \psi \in \mathrm{dom}(\tilde{A})$.*
  $\tilde{A}$ heißt Friedrichserweiterung von A

Beweis. Setze $\mathcal{H} \supseteq \tilde{Q} := \overline{\mathrm{dom}(A)}$ Form core von q_A. (O.E. M=0). Setze $\langle\langle \phi, \psi \rangle\rangle$ als stetige Fortsetzung von $q_A(\phi, \psi) + \langle \phi, \psi \rangle$ von $\mathrm{dom}(A) \times \mathrm{dom}(A)$ auf $\tilde{Q} \times \tilde{Q}$. Setze $(\tilde{Q}, \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle) =: \mathbb{H}$ Hilbert-Raum definiere $\hat{q}$ als stetige Fortsetzung von q (definiert auf $\mathrm{dom}(A) \times \mathrm{dom}(A)$) auf $\tilde{Q} \times \tilde{Q} \Rightarrow \hat{q}$ abgeschlossene, positive, quadratische Form auf $\mathbb{H} = \tilde{Q} \overset{\text{Satz 3.31}}{\Rightarrow} \exists_1 \tilde{A} : \mathrm{dom}(\tilde{A}) \to \mathcal{H}$ selbstadjungiert mit $\mathrm{dom}(\tilde{A}) \subseteq \hat{Q}$ und $\hat{q}(\phi, \psi) = \left\langle \phi, \tilde{A}\psi \right\rangle$ $\forall \phi, \psi \in \mathrm{dom}(\tilde{A})$
Zeige: $\hat{A} \supseteq A$
$\forall \psi \in \mathrm{dom}(\hat{A})\ \exists (\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{dom}(A)$ mit $\hat{q}(\phi, \psi - \psi_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0\ \forall \phi \in \hat{Q}$
$\Rightarrow \forall \phi \in \mathrm{dom}(A)\ \forall \psi \in \mathrm{dom}(\hat{A})$:

$$\langle A\phi, \psi \rangle = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\langle A\phi, \psi_n \rangle}_{\langle \phi, A\psi_n \rangle = q_A(\phi, \psi_n) = \hat{q}(\phi, \psi_n)} = \hat{q}(\phi, \psi) = \left\langle \phi, \hat{A}\psi \right\rangle$$

$\Rightarrow \phi \in \mathrm{dom}(\underbrace{\hat{A}^*}_{\hat{A}})$ und $\hat{A}\phi = A\phi \Rightarrow \mathrm{dom}(\hat{A}) \supseteq \mathrm{dom}(A)$ und $\hat{A}|_{\mathrm{dom}(A)} = A$
zur Eindeutigkeit: Nehme an: $\tilde{A} \supseteq A$ selbstadjungiert $\overset{\text{analoges Arg.}}{\Rightarrow} \tilde{A} \subseteq \hat{A} \overset{\text{Bemerkung}}{\Rightarrow}$ $\tilde{A} = \hat{A}$ □

3.35 Beispiel. $\mathcal{H} = L^2(]0,1[$ $\mathrm{dom}(A) = C_C^\infty(]0,1[)$ $A\psi = -\psi''$ $\forall \psi \in \mathrm{dom}(A)$ $\Rightarrow \Delta_D$ ist Friedrichserweiterung von A, da

- $\hat{Q} = \overline{C_C^\infty(]0,1[)}^{\|\cdot\|_{1,2}} = H_0^1(]0,1[)$
- $\mathrm{dom}(\Delta_D) = \overline{\left\{\psi \in C_C^\infty(]0,1[) : \lim_{x\to 0}(\psi(x)) = 0 \lim_{x\to 1}(\psi(x)) = 0\right\}}^{\|\cdot\|_{\mathrm{Graph}}} \subset \hat{Q}$