4 a) Für $0<x<a$ $V(x)=0$, deshalb:

$$H = \frac{p^2}{2m} \stackrel{!}{=} E \Rightarrow p = \sqrt{2mE}$$

Ein Durchlauf $0 \to a \to 0$.

Die BS-Quantisierung gibt:

$$nh = \oint p\,dx = \int_0^a dx\sqrt{2mE} + \int_a^0 d(-x)\sqrt{2mE}$$

$$= 2a\sqrt{2mE}.$$ Hiermit finden wir:

$$E_n = \frac{1}{2m}\left(\frac{nh}{2a}\right)^2 = \frac{n^2h^2}{8ma^2}.$$

b) Der Hamiltonian für $x>0$ ist gegeben durch:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 \stackrel{!}{=} E$$

Ein Durchlauf geht von 0 zu x_a, wo $p=0$: $E = \frac{1}{2}kx_a^2 \Rightarrow x_a = \sqrt{2E/k} > 0$, und wieder zurück. Wir lösen p als eine Funktion von x bei den Energie[n]:

$$p^2 = 2m(E - \tfrac{1}{2}kx^2) \qquad p = \sqrt{2m(E-\tfrac{1}{2}kx^2)}$$

BS-Quantisierung:

$$nh = 2\int_0^{x_a}\sqrt{2m(E_n - \tfrac{1}{2}kx^2)}\,dx$$

Setze $x = \cancel{x_a \sin\theta} = \sqrt{\frac{2E}{k}}\sin\theta$, dies gibt

$$nh = 2\sqrt{\frac{2E}{k}}\sqrt{2mE_n}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2\theta}\,\cos\theta\,d\theta$$

$$= 4\sqrt{\frac{m}{k}}E_n\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta$$

Mit $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ gibt:

$$nh = 4\sqrt{\frac{m}{k}}E_n\int_0^{\pi/2}d\theta\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos 2\theta\right)$$

$$= 4\sqrt{\frac{m}{k}}E_n\left[\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 4\sqrt{\frac{m}{k}}E_n\frac{\pi}{4}$$

$$E_n = \sqrt{\frac{k}{m}}\frac{nh}{\pi} = 2n\hbar\omega, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Die harmonische Oszillators hat $E_n^{HO} = n\hbar\omega$.

Also nur die Hälfte des harm. Os. ~~spek~~trum findet man hier.

-c) $H = \frac{p^2}{2m} + A|x| = E > 0$

Ein Durchlauf ist von:

$-E/A \rightarrow E/A \rightarrow -E/A$

$p = \sqrt{2m(E - A|x|)}$

$$nh = 2\int_{-E/A}^{E/A} \sqrt{2m(E - A|x|)}\, dx = 4\int_0^{E/A} \sqrt{2m(E - Ax)}\, dx = 4\sqrt{2mE} \int_0^{E/A} (1 - \tfrac{A}{E}x)\, dx$$

Weil Integrand symmetrisch ist unter $x \to -x$

$z = \frac{A}{E}x \Rightarrow = 4\frac{E}{A} \cdots \int_0^1 \sqrt{1-z}\, dz$

$dx = \frac{E}{A} dz$ $\quad y = (1-z)$

$x = (E/A)(1-y)$ gibt:

$$nh = 4\frac{E}{A}\sqrt{2mE} \int_0^1 dy \sqrt{y} = 4\frac{\sqrt{2m}}{A} E^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \ldots$$

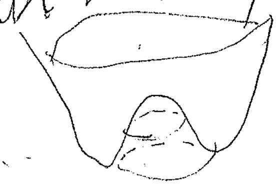
$$E^{\frac{3}{2}} = \frac{3nh}{8} \frac{A}{(2m)^{1/2}} \qquad E = \left(\frac{3nh}{8}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{A^{\frac{2}{3}}}{(2m)^{1/3}}$$

$$E = \left(\frac{3n\, 2\pi\hbar}{8\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{A^{\frac{2}{3}}}{m^{1/3}} = \left(\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{A^2\hbar^2}{m}\right)^{\frac{1}{3}} n^{2/3}.$$

5a) Beim $x^2 + y^2 = R^2$ ist Potential 0,

Beim $x = y = 0$ maximum $\frac{a}{2}R^4$.

Für $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$ $\quad V \sim \frac{a}{2} r^4 \to \infty$.



5b) $E = H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{a}{2}(x^2 + y^2 - R^2)^2 \ll \frac{a}{2}R^4$

Das impliziert das $\frac{x^2 + y^2 - R^2}{R^2} \ll 1$,

also das Teilchen bewegt auf dem Kreis

$x^2 + y^2 = R^2$.

5d) $x = r\cos\theta$ $\quad \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}$

$y = r\sin\theta$ $\quad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta}$

Die Lagrangian in Polarkoordinaten:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{a}{2}(x^2 + y^2 - R^2)^2$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{a}{2}(r^2 - R^2)^2$$

$$p_r \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

$$H = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{a}{2}(r^2 - R^2)^2.$$

5d) Da H nicht von θ abhängt, $\dot{p}_\theta = 0$ also p_θ erhalten.

Für $a \to \infty$, $r = R$, and $p_R = 0$

Wir können also BS-Quantisierung nur auf p_θ, θ anwenden:

$$nh = \oint p_\theta d\theta = 2\pi p_\theta \qquad p_\theta = n\hbar$$

$$E = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} = \frac{n^2\hbar^2}{2mR^2}.$$

6a) Wir berechnen beide Termen und summieren:

$$i\hbar\partial_t P = i\hbar\partial_t(\psi^*\psi) = i\hbar(\partial_t\psi^*\psi + \psi^*\partial_t\psi) =$$

$$= -\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + \cancel{V(\vec{r})}\right](\psi^*)\psi + \psi^*\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + \cancel{V(\vec{r})}\right]\psi$$

$$= \frac{\hbar}{2m}\left[(\vec{\nabla}^2\psi)^*\psi - \psi^*\vec{\nabla}^2\psi\right], \text{ da } -i\hbar\partial_t\psi^* = \hat{H}\psi^*$$

$$i\hbar\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = \frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\cdot(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \vec{\nabla}\psi^*\psi) =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}\left[\cancel{\vec{\nabla}\psi^*\cdot\vec{\nabla}\psi} + \psi^*\vec{\nabla}^2\psi - \vec{\nabla}^2\psi^*\psi - \cancel{\vec{\nabla}\psi^*\cdot\vec{\nabla}\psi}\right]$$

Summieren gibt Null, also folgt die Kontinuitätsgleichung.

6b) Integriere die Kont. gleichung:

$$\partial_t N = -\int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = \int_{\partial\mathbb{R}^3} d\vec{S}\cdot\vec{j} = 0$$

$\partial\mathbb{R}^3$ is Rand $\mathbb{R}^3$ auf Unendlich. Da $\psi, \vec{\nabla}\psi \to 0$ für $\vec{r} \to \infty$, die Randterm verschwindet. Also ist N erhalten. Wenn wir also ein mal ψ so normieren dass $N = 1$, dann so für jede Zeit t.

6c) Wie 6a) rechnen:

$$i\hbar\partial_t\mathcal{E} = i\hbar\partial_t\psi^*\hat{H}\psi + i\hbar\psi^*\hat{H}\partial_t\psi = -\hat{H}\psi^*\hat{H}\psi + \psi^*\hat{H}^2\psi,$$

da $\hat{H}$ nicht explizit zeitabhängig.

$$i\hbar\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{\nabla}\psi^*\hat{H}\psi - \psi^*\vec{\nabla}\hat{H}\psi\right]$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\vec{\nabla}^2\psi^*\hat{H}\psi + \cancel{\vec{\nabla}\psi^*\vec{\nabla}\hat{H}\psi} - \cancel{\vec{\nabla}\psi^*\vec{\nabla}\hat{H}\psi} - \psi^*\vec{\nabla}^2\hat{H}\psi\right]$$

$$= (\hat{H} - \cancel{V})\psi^*\hat{H}\psi - \psi^*(\hat{H} - \cancel{V})\hat{H}\psi = \hat{H}\psi^*\hat{H}\psi - \psi^*\hat{H}^2\psi$$

Die Summe verschwindet werden.