7a) Nur das Absolutquadrat der Wellenfunktion definiert die Wahrscheinlichkeit und Erwartungswerte. Dies impliziert, dass die Phase von N unwichtig ist.

Erinnere dass:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x\, e^{-ax^2} = 0 \;(*)$$

Wenn wir jetzt $x \to x - x_0$ ersätzen, bekommen wir:

$$1 \overset{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi(x)|^2 = N^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-a(x-x_0)^2} = N^2 \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow N = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}: \quad \psi(x) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{a}{2}(x-x_0)^2}$$

7b) $$\langle \hat{x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-a(x-x_0)^2}$$

Ersätze $x = x_0 + y$; und benütze (*):

$$\langle \hat{x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, (x_0 + \cancel{y}^{\,0}) \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-ay^2} = x_0 \cdot 1 = x_0$$

$$\langle \hat{p} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{a}{2}(x-x_0)^2} \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} e^{-\frac{a}{2}(x-x_0)^2}$$

$$= \frac{\hbar}{i}(-a) \int_{-\infty}^{\infty} dx (x-x_0) e^{-a(x-x_0)^2} = 0.$$

7c) $$\Delta x^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle (x-x_0)^2 \rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, (x-x_0)^2 \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-a(x-x_0)^2} \qquad x = x_0 + y$$

$$= \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, y\, e^{-ay^2} \cdot y = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\underbrace{\frac{-1}{2a} e^{-ay^2} y \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{2a} e^{-ay^2} \right]$$

$$= \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2a} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2a}.$$

Für $\Delta p^2 = \langle (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 \rangle = \langle \hat{p}^2 \rangle$, berechnen wir zuerst:

$$\hat{p}^2 e^{-\frac{a}{2}(x-x_0)^2} = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} e^{-\frac{a}{2}(x-x_0)^2} =$$

$$-\hbar^2 \frac{d}{dx} \left[-a(x-x_0) e^{-\frac{a}{2}(x-x_0)^2} \right] = -\hbar^2 \left[a^2(x-x_0)^2 - a \right] e^{-\frac{a}{2}(x-x_0)^2}$$

deshalb mit vorige Ergebnissen:

$$\Delta p^2 = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, {-\hbar^2} \left[a^2 (x-x_0)^2 - a \right] e^{-\frac{a}{2}(x-x_0)^2}$$

$$= -\hbar^2 \left[a^2 \frac{1}{2a} - a \right] = \frac{\hbar^2 a}{2}$$

7d) $$\Delta x \Delta p = \left(\frac{1}{2a} \frac{\hbar^2 a}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\hbar}{2} \quad ✓$$

8a) Variationsprinzip $\delta S = 0$, $S = \int_{t_0}^{t_1} dt L$

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt\, \delta L(x,\dot{x}) = \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x} \right)$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x \Big|_{t_0}^{t_1} \stackrel{!}{=} 0$$

Aber da die Randbedingungen so sind, dass $\delta x(t_0) = \delta x(t_1) = 0$, folgt: $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$.

8b) Wir berechnen: $\frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = p - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$, durch die Definition von p.

8c) $\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}[\dot{x}p - L(x,\dot{x})] = \dot{x}$ ✓,

$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -\dot{p}$ ✓

8d) Die fundamentale Kommutationsrelation ist $[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$. Da die Kommutator eine bilineare Operation ist, brauchen wir die Relationen nur zu zeigen für Monomen aus $\hat{x}$ und $\hat{p}$. Sei $F_n(\hat{x},\hat{p})$ ein Monom von Ordnung n in $\hat{x}$ und $\hat{p}$. Für Ordnung $n=1$, sind die Relationen einfach

$[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar \cdot 1$, $[\hat{p},\hat{x}] = -i\hbar\cdot 1$.

Für $n \geq 2$ gilt entweder $F_n = \hat{x} F_{n-1}$ oder $F_n = \hat{p} F_{n-1}$, für ein Ordnung $n-1$ Monom in $\hat{x}, \hat{p}$. Mit Induktion, nehmen wir an das für F_{n-1} diese Relation schon bewiesen sind. Dann entweder:

$[\hat{x}, F_n] = [\hat{x}, \hat{x} F_{n-1}] = \underbrace{[\hat{x},\hat{x}]}_{=0} F_{n-1} + \hat{x}[\hat{x}, F_{n-1}]$

$= \hat{x}\, i\hbar \frac{\partial}{\partial \hat{p}} F_{n-1} = i\hbar \frac{\partial}{\partial \hat{p}}(\hat{x} F_{n-1}) = i\hbar \frac{\partial}{\partial \hat{p}} F_n$ ✓

oder:

$[\hat{x}, F_n] = [\hat{x}, \hat{p} F_{n-1}] = \underbrace{[\hat{x},\hat{p}]}_{=i\hbar} F_{n-1} + \hat{p}[\hat{x}, F_{n-1}]$

$= i\hbar F_{n-1} + \hat{p}\, i\hbar \frac{\partial}{\partial \hat{p}} F_{n-1} = i\hbar \frac{\partial}{\partial \hat{p}}(\hat{p} F_{n-1})$ ✓

Ähnlich zeigt man: $[\hat{p}, F_n] = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \hat{x}} F_n$.

8e) $\frac{d}{dt}\langle \hat{A}\rangle = \frac{d}{dt}\int dx\, \psi^*(t,x)\hat{A}\psi(t,x)$; $\hat{A} = \hat{x}, \hat{p}$

$= \int dx \left[\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*(t,x))\hat{A}\psi(t,x) + \psi^*(t,x)\hat{A}\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x) \right]$,

da x eine Integrationsvariable ist, wirkt $\frac{d}{dt}$ nur als Partielleableitung auf ψ und ψ^*. Die Schr. gleichung gibt:

$\frac{d}{dt}\langle \hat{A}\rangle = \frac{1}{i\hbar}\int dx\, \psi^*[-\hat{H}\hat{A} + \hat{A}\hat{H}]\psi = \frac{1}{i\hbar}\langle [\hat{A},\hat{H}]\rangle$

8e cont) Mit den Ergebnissen aus 8d) mit $\hat{F} = \hat{A}$, folgen dann die Ehrenfest-Gleichungen.

9a) $e^{ipx/\hbar}$ ist eine Eigenfunktion von $\hat{p}$:

$$\hat{p}\, e^{ipx/\hbar} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} e^{ipx/\hbar} = \frac{\hbar}{i}\frac{ip}{\hbar} e^{ipx/\hbar} = p e^{ipx/\hbar},$$

und der Eigenwert ist also p. Da $p \in \mathbb{R}$, sieht die Entwicklung wie ein Integral über p aus; genau wie:

$$f(x) = \int dp\, e^{ipx/\hbar} \tilde{f}(p).$$

9b) Die δ-Funktion ist definiert als $\int \delta(x-x') f(x) = f(x')$, also in besonders: $\int \delta(x-x') = 1$. Das heißt dass $\delta(x-x')$ überall Null ist außer $x-x'=0$, aber trotzdem sein Integral 1. Da ein Funktion auf jeden Punkt einen endlichen Wert annehmt, soll diesen Integral auch Null sein.

9c) Schreibe $f(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\, e^{ipx'/\hbar} \tilde{f}(p)$ und $\tilde{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx\, e^{-ipx/\hbar} f(x)$, und combiniere diese Gleichungen:

$$f(x') = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dx\, dp\, e^{ip(x'-x)/\hbar} f(x)$$

$$= \int dx \left[\frac{1}{2\pi\hbar} \int dp\, e^{-ip(x-x')}\right] f(x) \stackrel{!}{=} \int dx\, \delta(x-x') f(x)$$

Da $f(x)$ beliebig ist, finden wir:

$$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp\, e^{-ip(x-x')}.$$