10a) $N_1 \psi_1 = \phi_1 \Rightarrow N_1^2 \langle \psi_1, \psi_1 \rangle = \langle \phi_1, \phi_1 \rangle$

Da $\langle \psi_1, \psi_1 \rangle = 1$ bei Definition $\Rightarrow$

$N_1 = \sqrt{\langle \phi_1, \phi_1 \rangle}$

10b) $\langle \psi_1, N_2 \psi_2 \rangle = \langle \psi_1, \phi_2 - \langle \psi_1, \phi_2 \rangle \psi_1 \rangle$

$= \langle \psi_1, \phi_2 \rangle - \langle \psi_1, \phi_2 \rangle \overbrace{\langle \psi_1, \psi_1 \rangle}^{=1} = 0 \checkmark$

$N_2^2 = \langle N_2 \psi_2, N_2 \psi_2 \rangle =$

$= \langle \phi_2 - \langle \psi_1, \phi_2 \rangle \psi_1, \phi_2 - \langle \psi_1, \phi_2 \rangle \psi_1 \rangle$

$= \langle \phi_2, \phi_2 \rangle - \langle \psi_1, \phi_2 \rangle^* \langle \psi_1, \phi_2 \rangle +$

$- \langle \phi_2, \psi_1 \rangle \langle \psi_1, \phi_2 \rangle + \langle \psi_1, \phi_2 \rangle^* \langle \psi_1, \phi_2 \rangle$

$= \langle \phi_2, \phi_2 \rangle - |\langle \psi_1, \phi_2 \rangle|^2,$

wo benützt ist, dass $\langle \phi_2, \psi_1 \rangle = \langle \psi_1, \phi_2 \rangle^*$.

Einsetzen ψ_1 ergibt:

$$N_2 = \sqrt{\langle \phi_2, \phi_2 \rangle - \frac{|\langle \phi_1, \phi_2 \rangle|^2}{\langle \phi_1, \phi_1 \rangle}}.$$

10c) $\langle \psi_1, N_3 \psi_3 \rangle = \langle \psi_1, \phi_3 \rangle - \langle \psi_1, \phi_3 \rangle \overbrace{\langle \psi_1, \psi_1 \rangle}^{=1} +$

$- \langle \psi_2, \phi_3 \rangle \overbrace{\langle \psi_1, \psi_2 \rangle}^{=0} = 0 \checkmark$

$\langle \psi_2, N_3 \psi_3 \rangle = \langle \psi_2, \phi_3 \rangle - \langle \psi_1, \phi_3 \rangle \overbrace{\langle \psi_2, \psi_1 \rangle}^{=0} +$

$- \langle \psi_2, \phi_3 \rangle \overbrace{\langle \psi_2, \psi_2 \rangle}^{=1} = 0 \checkmark$

10d) $N_1^2 = \langle \phi_1, \phi_1 \rangle = 1+1 = 2 \Rightarrow \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$N_2 \psi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} (1\,1\,0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$N_2^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow \psi_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$N_3 \psi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} (1\,1\,0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{2}\, -\frac{1}{2}\, 1\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/6 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \quad N_3^2 = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$

Also $\psi_3 = \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1a) Wir berechnen die Eigenwerte nun.

$$0 \stackrel{!}{=} \det(\hat{A}-\lambda \mathbb{1}_3) = \begin{vmatrix} E-\lambda & i\varepsilon/\sqrt{2} & 0 \\ -i\varepsilon/\sqrt{2} & E-\lambda & i\varepsilon/\sqrt{2} \\ 0 & -i\varepsilon/\sqrt{2} & E-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (E-\lambda)\begin{vmatrix} E-\lambda & i\varepsilon/\sqrt{2} \\ -i\varepsilon/\sqrt{2} & E-\lambda \end{vmatrix} - i\varepsilon/\sqrt{2}\begin{vmatrix} -i\varepsilon/\sqrt{2} & i\varepsilon/\sqrt{2} \\ 0 & E-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (E-\lambda)\left\{(E-\lambda)^2 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right\} - \frac{\varepsilon^2}{2}(E-\lambda) = (E-\lambda)\left\{(E-\lambda)^2 - \varepsilon^2\right\}$$

Dies gibt $\lambda = E$, $\lambda = E \pm \varepsilon$. Da $E > \varepsilon > 0$ finden wir: $E+\varepsilon > E > E-\varepsilon > 0$. Dies legt die Anordnung fest: $E_0 = E$, $E_\pm = E \pm \varepsilon$.

Ein positiv definiter Operator hat nur positive Eigenwerte. Da $E > \varepsilon > 0$, sehen wir $E_+ > E_0 > E_- > 0$, also $\hat{A}$ positiv definit.

1b) Ein Eigenvektor $|\lambda\rangle$ mit Eigenwert λ wird bestimmt durch den Nullraum von $\hat{A}-\lambda\mathbb{1}_3$.

E_0: $(\hat{A}-E_0)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \frac{i\varepsilon}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta \\ -\alpha+\gamma \\ -\beta\end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow$

$|E_0\rangle = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $1 = \langle E_0|E_0\rangle = \alpha^2(1+1) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$|E_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

$E_\pm$: $(\hat{A}-E_\pm)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mp\sqrt{2} & i & 0 \\ -i & \mp\sqrt{2} & i \\ 0 & -i & \mp\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\mp\sqrt{2}\alpha + i\beta \\ -i\alpha + i\gamma \mp\sqrt{2}\beta \\ \mp\sqrt{2}\gamma - i\beta\end{pmatrix}$

$\stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \alpha = \pm\frac{i}{\sqrt{2}}\beta$, $\gamma = \mp\frac{i}{\sqrt{2}}\beta$

(Check: $-i\alpha + i\gamma \mp\sqrt{2}\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\beta \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\beta \mp \sqrt{2}\beta = 0$ ✓)

$1 = \langle E_\pm|E_\pm\rangle = \left|\pm\frac{i}{\sqrt{2}}\beta\right|^2 + \beta^2 + \left|\mp\frac{i}{\sqrt{2}}\beta\right|^2 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)\beta^2 \Rightarrow \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$|E_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\pm\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \mp\frac{i}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\pm i \\ \sqrt{2} \\ \mp i\end{pmatrix}$

1c) $|\psi_1\rangle$ ist normiert und gegeben durch $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

Die Wahrscheinlichkeit P_i, dass bei einer Energiemessung E_i gemessen wird ist $P_i = |\langle E_i|\psi_1\rangle|^2$

$P_0 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}(1\ 0\ 1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{2}$

$P_\pm = \left|\frac{1}{2}(\pm i\ \ \sqrt{2}\ \mp i)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right|^2 = \left|\frac{\pm i}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}$

(Check: $P_0 + P_+ + P_- = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ ✓)

12a) $\hat{\rho} = \sum_N \rho_N |\Psi_N\rangle\langle\Psi_N|$ für einen Set unabhängige Vektoren $|\Psi_N\rangle$. $\rho_N \geq 0$, $\sum_N \rho_N = 1$.

Die Entropie ist dann gegeben durch:

$$S = -k \sum_N \rho_N \ln \rho_N \geq 0$$

Da $\sum_N \rho_N = 1 \Rightarrow 0 \leq \rho_N \leq 1$, und $\ln \rho_N \leq 0$.

Für ein pure Zustand $|\Psi\rangle$ gibt es eine basis so dass $|\Psi_1\rangle = |\Psi\rangle$, und $\rho_1 = 1$, $\rho_{N\neq 1} = 0$

$$S = -k \underbrace{\rho_1}_{=1} \underbrace{\ln \rho_1}_{=0} - k \sum_{N\neq 1} \underbrace{\rho_N \ln \rho_N}_{=0} = 0.$$

12b) Für $\mathcal{H}_1$ is $|\psi_n\rangle$ ein Basis, und für $\mathcal{H}_2$ $|\varphi_\alpha\rangle$. $\hat{\rho}_1 = \sum_n (\rho_1)_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$, $\hat{\rho}_2 = \sum_\alpha (\rho_2)_\alpha |\varphi_\alpha\rangle\langle\varphi_\alpha|$

$\hat{\rho} = \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2$ auf $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ heißt das

$\rho_N = \rho_{n\alpha} = (\rho_1)_n (\rho_2)_\alpha$. Damit:

$$S = -k \sum_{n,\alpha} (\rho_1)_n (\rho_2)_\alpha \ln((\rho_1)_n (\rho_2)_\alpha)$$

$$= -k \overbrace{\sum_n (\rho_1)_n}^{=1} \sum_\alpha (\rho_2)_\alpha \ln(\rho_2)_\alpha - k \overbrace{\sum_\alpha (\rho_2)_\alpha}^{=1} \sum_n (\rho_1)_n \ln(\rho_1)_n$$

$$= S_1 + S_2 \checkmark$$

12c) Da dieser Zustand in $\mathcal{H}$ durch ein Vektor $|\Psi\rangle$, also $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ gegeben ist, ist er pur.

Nehme an dass $|\Psi\rangle$ nicht verschränkt ist.

Da in $|\Psi\rangle$ nur $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ aus $\mathcal{H}_1$ und $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle$ aus $\mathcal{H}_2$ auftreten, können wir schreiben: $|\Psi\rangle = (\alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle) \otimes (\gamma|\varphi_1\rangle + \delta|\varphi_2\rangle)$

$= \alpha\gamma|\psi_1\rangle|\varphi_1\rangle + \alpha\delta|\psi_1\rangle|\varphi_2\rangle + \beta\gamma|\psi_2\rangle|\varphi_1\rangle + \beta\delta|\psi_2\rangle|\varphi_2\rangle$

$\Rightarrow \alpha\delta = \beta\gamma = 0$ und $\alpha\gamma = \beta\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Aber dies unmöglich!

12d) $\langle\Psi|\hat{A}_1|\Psi\rangle = \frac{1}{2}(\langle\psi_1|\langle\varphi_1| + \langle\psi_2|\langle\varphi_2|)\hat{A}_1(|\psi_1\rangle|\varphi_1\rangle + |\psi_2\rangle|\varphi_2\rangle)$

$= \frac{1}{2}\langle\psi_1|\hat{A}_1|\psi_1\rangle + \frac{1}{2}\langle\psi_2|\hat{A}_1|\psi_2\rangle$, da $\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle = \delta_{ij}$

$\overset{!}{=} \mathrm{Tr}(\hat{\rho}_1 \hat{A}_1) \Rightarrow \hat{\rho}_1 = \frac{1}{2}|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + \frac{1}{2}|\psi_2\rangle\langle\psi_2|$

12e) $S_1 = -k\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\right) = k \ln 2.$