13a) $\mathcal{F}$ ist analytisch, d.h. $\mathcal{F}(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

$e^{\hat{A}} e^{-\hat{A}} = e^{\hat{A}-\hat{A}} = 1$, weil $\hat{A}$ mit $-\hat{A}$ kommutiert. Deshalb:

$$\mathcal{F}(e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}}) = \sum_{n\geq 0} a_n \overbrace{(e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}})\cdots(e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}})}^{n \text{ mal}}$$

$$= \sum_{n\geq 0} a_n e^{\hat{A}} \overbrace{\hat{B}\cdots\hat{B}}^{n \text{ mal}} e^{-\hat{A}} = e^{\hat{A}} \mathcal{F}(\hat{B}) e^{-\hat{A}}.$$

13b) Definiere $\hat{G}_L(\tau) \equiv e^{\tau\hat{A}}\hat{B}e^{-\tau\hat{A}}$, $\hat{G}_R(\tau) = e^{\tau L_{\hat{A}}}(\hat{B})$.

Dann $\hat{G}_L(0) = \hat{G}_R(0) = \hat{B}$. Für die erste Ableitung:

$$\frac{d}{d\tau}\hat{G}_L(\tau) = \hat{A}e^{\tau\hat{A}}\hat{B}e^{-\tau\hat{A}} - e^{\tau\hat{A}}\hat{B}e^{-\tau\hat{A}}\hat{A} = [\hat{A},\hat{G}_L(\tau)]$$

$$\frac{d}{d\tau}\hat{G}_R(\tau) = (L_{\hat{A}}\, e^{\tau L_{\hat{A}}})(\hat{B}) = [\hat{A}, e^{\tau L_{\hat{A}}}(\hat{B})] = [\hat{A},\hat{G}_R(\tau)]$$

Also $\hat{G}_L$ und $\hat{G}_R$ erfüllen die gleiche Differentialgleichung, mit die gleiche Anfangswert. Die Eindeutlichkeit erste Ordnung DG reicht dass $G_L(\tau) = G_R(\tau)$.

13c) Definiere: $\hat{\mathcal{F}}_L(\tau) = e^{\tau\hat{A}}e^{\tau\hat{B}}$; $\hat{\mathcal{F}}_R(\tau) = e^{\tau(\hat{A}+\hat{B})}e^{-\frac{\tau^2}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$

$\frac{d}{d\tau}\hat{\mathcal{F}}_L(\tau) = \hat{A}\hat{\mathcal{F}}_L(\tau) + \hat{\mathcal{F}}_L(\tau)\hat{B}$, umschreiben gibt:

$$\hat{\mathcal{F}}_L(\tau)^{-1}\frac{d}{d\tau}\hat{\mathcal{F}}_L(\tau) = e^{-\tau\hat{B}}e^{-\tau\hat{A}}\hat{A}e^{\tau\hat{A}} + \hat{B} = e^{-\tau\hat{B}}\hat{A}e^{\tau\hat{B}} + \hat{B}$$

$= e^{\tau L_{\hat{B}}}(\hat{A}) + \hat{B}$, wo wir 13b) benutzt haben.

Nun $e^{\tau L_{\hat{B}}}(\hat{A}) = \sum_{n\geq 0}\frac{\tau^n}{n!}L^n_{\hat{B}}(\hat{A}) = \hat{A} + \sum_{n\geq 1}\frac{\tau^n}{n!}L^{n-1}_{\hat{B}}([\hat{B},$

Da $[\hat{A},\hat{B}]$ mit $\hat{B}$ vertauscht: $L^p_{\hat{B}}([B,A]) = 0$, für $p>0$

also $e^{\tau L_{\hat{B}}}(\hat{A}) = \hat{A} + \tau[\hat{B},\hat{A}]$. Dies gibt:

$$\hat{\mathcal{F}}_L(\tau)^{-1}\frac{d}{d\tau}\hat{\mathcal{F}}_L(\tau) = \hat{A} + \hat{B} - \tau[\hat{A},\hat{B}].$$

Da $[\hat{A},\hat{B}]$ auch mit $\hat{A}+\hat{B}$ vertauscht, bekommen wir gleich:

$$\hat{\mathcal{F}}_R(\tau)^{-1}\frac{d}{d\tau}\hat{\mathcal{F}}_R(\tau) = \hat{A}+\hat{B}-\tau[\hat{A},\hat{B}] = \hat{\mathcal{F}}_L(\tau)^{-1}\frac{d}{d\tau}\hat{\mathcal{F}}_L(\tau)$$

Weil auch $\hat{\mathcal{F}}_L(0) = \hat{\mathcal{F}}_R(0)$, folgt dass $\hat{\mathcal{F}}_L(\tau) = \hat{\mathcal{F}}_R(\tau)$

13d) Im Heisenberg-Bild ist $\hat{p}_H(t) = e^{it\hat{H}/\hbar}\hat{p}e^{-it\hat{H}/\hbar}$, weil $\hat{H}$ is selbst Zeitunabhängig. Mit 13b) finden wir $\hat{p}_H(t) = e^{\frac{it}{\hbar}L_{\hat{H}}}(\hat{p}) = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}(it/\hbar)^n L^n_{\hat{H}}(\hat{p})$

Danach, so

$$L_{\hat H}(\hat p) = [\hat H, \hat p] = -[\hat p, \tfrac{1}{2} m\omega^2 \hat x^2] = m\omega^2 i\hbar \hat x$$

$$L_{\hat H}^2(\hat p) = [\hat H, L_{\hat H}(\hat p)] = m\omega^2 i\hbar [\hat H, \hat x] =$$

$$= -m\omega^2 i\hbar [\hat x, \tfrac{1}{2m}\hat p^2] = -\omega^2 (i\hbar)^2 \hat p = \omega^2\hbar^2 \hat p$$

Deshalb:

$$L_{\hat H}^{2n}(\hat p) = (\omega^2\hbar^2)^n \hat p, \quad L_{\hat H}^{2n+1}(\hat p) = m\omega i\hbar (\omega^2\hbar^2)^n \hat x$$

Hiermit finden wir:

$$\hat p_H(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n)!}\left(\frac{it}{\hbar}\right)^{2n} L_{\hat H}^{2n}(\hat p) + \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{it}{\hbar}\right)^{2n+1} L_{\hat H}^{2n+1}(\hat p)$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{(-)^n}{(2n)!}\left(\frac{t}{\hbar}\right)^{2n} (\omega\hbar)^{2n}\hat p + \sum_{n\geq 0}\frac{(-)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{t}{\hbar}\right)^{2n}(\omega^2\hbar)^{2n}\frac{it}{\hbar} m\omega i\hbar \hat x$$

$$= \sum_{n\geq 0}\frac{(-)^n(\omega t)^{2n}}{(2n)!}\hat p - \sum_{n\geq 0}\frac{(-)^n(\omega t)^{2n+1}}{(2n+1)!} m\omega \hat x$$

$$= \cos(\omega t)\,\hat p - \sin(\omega t)\, m\omega \hat x$$

14a) Wir berechnen $\hat H$ auf $\hat A|n\rangle$, $\hat B|n\rangle$ und benützen die angegeben Eigenschaften:

$$\hat H \hat A|n\rangle = \hat A \hat H|n\rangle = E_n \hat A|n\rangle \quad \text{und}$$

$$\hat H \hat B|n\rangle = \hat B \hat H|n\rangle = E_n \hat B|n\rangle.$$

14b) $\hat B|n\rangle = \alpha \hat A|n\rangle \Rightarrow \langle n|\hat B = \alpha^* \langle n|\hat A$, $\alpha\in\mathbb{C}$, $\alpha\neq 0$.

damit finden wir:

$$\langle n|(\hat A\hat B - \hat B\hat A)|n\rangle = \langle n|\hat A\hat B|n\rangle - \langle n|\hat B\hat A|n\rangle =$$

$$= \alpha\langle n|\hat A^2|n\rangle - \alpha^*\langle n|\hat A^2|n\rangle = (\alpha-\alpha^*)\langle n|\hat A^2|n\rangle$$

Es gilt dass:

$$\alpha\langle n|\hat A|n\rangle = \langle n|\hat B|n\rangle = \alpha^*\langle n|\hat A|n\rangle \Rightarrow \alpha = \alpha^*,$$

weil $\langle n|\hat A|n\rangle \neq 0$.

14c) Kombinieren von 14 b) und 14 c) gibt:

$$\langle n|\hat C|n\rangle = \langle n|[\hat A, \hat B]|n\rangle = 0.$$

Aber die Annahme war, dass $\langle n|\hat C|n\rangle \neq 0$.

Also sind $\hat A|n\rangle$ und $\hat B|n\rangle$ entartet.

15a) Die Schrödinger-Gleichung lautet:

$$i\hbar \frac{d}{dt}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d}{dx}\right)^2\psi.$$

Ersetze ψ durch $\varphi_p(x,t)$ und führe die Differentiationen aus:

$$i\hbar \frac{d}{dt}\varphi_p(x,t) = i\hbar\left(\frac{-iE}{\hbar}\right)\varphi_p(x,t) = +E\,\varphi_p(x,t)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(+i\frac{p}{\hbar}\right)^2\varphi_p(x,t) = \frac{p^2}{2m}\varphi_p(x,t) \Rightarrow E = \frac{p^2}{2m}$$

15b) Aus Aufgabe 1, wissen wir:

$$\psi(x,0) = \int\frac{dp\,dx'}{2\pi\hbar}\,e^{ip(x-x')/\hbar}\,\psi(x',0)$$

$$= \int dp\,\varphi_p(x,0)\int\frac{dx'}{2\pi\hbar}\,\psi(x',0)\,e^{-ipx'/\hbar}$$

Wir berechnen die Integral über x':

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int dx'\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac14} e^{-\frac{a}{2}(x'-x_0)^2}e^{-ipx'/\hbar} =$$

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int dx'\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac14} e^{-\frac{a}{2}x'^2 + ax'x_0 - ipx'/\hbar - \frac{a}{2}x_0^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac14}\int dx'\, e^{-\frac{a}{2}\left(x'-x_0+i\frac{p}{a\hbar}\right)^2 + \frac{a}{2}\left(\left(i\frac{p}{a\hbar}\right)^2 - 2x_0\, i\frac{p}{a\hbar}\right)}$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac14}\int dx'\, e$$

Da $\int dx'\, e^{-\frac{a}{2}(x'-y)^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$, ergibt dies:

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac14}\left(\frac{2\pi}{a}\right)^{\frac12} e^{-\frac{p^2}{2a\hbar^2} - ix_0p/\hbar} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi^{3/4}a^{1/4}\hbar}\, e^{-\frac{1}{2a}\frac{p^2}{\hbar^2} - i\frac{x_0 p}{\hbar}}$$

Also:

$$\psi(x,0) = \int\frac{dp}{\sqrt{2}\,\pi^{3/4}a^{1/4}\hbar}\, e^{-\frac{1}{2a}\frac{p^2}{\hbar^2} - \frac{ip}{\hbar}x_0}\,\varphi_p(x,0)$$

15d) $\varphi_p(x,t)$ ist eine Lösung der Schrödinger-Gleichung, mit Randbedingung $\varphi_p(x,t=0) = \varphi_p(x,0)$. Also mit dem Superpositionsprinzip ist $\psi(x,t) = \int dp\, A(p)\,\varphi_p(x,t)$ ein Lösung mit $\psi(x,0) = \int dp\, A(p)\,\varphi_p(x,0)$. Dies anwenden auf Ergebnis 15c) gibt:

$$\psi(x,t) = \int\frac{dp}{\sqrt{2}\,\pi^{3/4}a^{1/4}\hbar}\, e^{-\frac{1}{2a}\frac{p^2}{\hbar^2} - i\frac{p}{\hbar}x_0}\,\varphi_p(x,t).$$

$$= \int\frac{dp}{\sqrt{2}\,\pi^{3/4}a^{1/4}\hbar}\, e^{-\frac{1}{2a}\frac{p^2}{\hbar^2} - i\frac{p}{\hbar}x_0}\, e^{-i\left(\frac{p^2}{2m}t - px\right)/\hbar}$$

$$= \int\frac{dp}{\sqrt{2}\,\pi^{3/4}a^{1/4}\hbar}\, e^{-\frac12\left(\frac{1}{a\hbar^2} + i\frac{t}{m\hbar}\right)p^2 + i\frac{p}{\hbar}(x-x_0)}$$

$$\stackrel{!}{=} \alpha\int dp\, e^{-\frac{A}{2}p^2 + ipb}$$

wo:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi^{3/4}a^{1/4}\hbar},\quad A = \frac{1}{a\hbar^2} + i\frac{t}{m\hbar},\quad b = \frac{x-x_0}{\hbar}.$$

15 d cont)

$$\psi(x,t) = \alpha \int dp\, e^{-\frac{A}{2}p^2 + i b p} = \alpha \int dp\, e^{-\frac{A}{2}(p - i\frac{b}{A})^2 - \frac{b^2}{2A}}$$

$$= \alpha \left(\frac{2\pi}{A}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{b^2}{2A}}$$

Beide Faktoren können wir berechnen:

$$\alpha\left(\frac{2\pi}{A}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi^{3/4} a^{1/4} \hbar} \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{a\hbar^2} + i\frac{t}{m\hbar}\right)^{1/2}} \frac{a^{\frac{1}{2}}\hbar}{a^{\frac{1}{2}}\hbar}$$

$$= \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\left(1 + i\frac{a t \hbar}{m}\right)^{1/2}} = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{a t \hbar}{m}\right)^2\right)^{1/4}} e^{-\frac{i}{2}\arctan\frac{a t \hbar}{m}},$$

$$\text{da: } \frac{1}{(1+i\beta)^{1/2}} = \left(\frac{1-i\beta}{1+\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{(1+\beta^2)^{1/4}} \left(\frac{1-i\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{(1+\beta^2)^{1/4}} e^{-\frac{i}{2}\arctan\beta}.$$

$$\frac{b^2}{2A} = \frac{(x-x_0)^2}{2\hbar^2\left(\frac{1}{a\hbar^2} + i\frac{t}{m\hbar}\right)} = \frac{(x-x_0)^2}{2a} \frac{1}{1 + i\frac{a t \hbar}{m}}$$

$$= \frac{a}{2}(x-x_0)^2 \frac{1 - i\frac{a t h}{m}}{1 + \left(\frac{a t h}{m}\right)^2}$$

Zusammen setzen ergibt:

$$\psi(x,t) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{a t \hbar}{m}\right)^2\right)^{1/4}} e^{-\frac{a}{2}\frac{(x-x_0)^2}{1 + \left(\frac{a\hbar t}{m}\right)^2}}.$$

$$\cdot e^{i\left\{\frac{a^2\hbar t}{2m}\frac{(x-x_0)^2}{1+\left(\frac{a\hbar t}{m}\right)^2} - \arctan\left(\frac{a\hbar t}{m}\right)\right\}}$$

15 e)

$$P(x,t) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{a t \hbar}{m}\right)^2\right)^{1/2}} e^{-a\frac{(x-x_0)^2}{1 + \left(\frac{a t \hbar}{m}\right)^2}}$$

Also die Wahrscheinlichkeit wird breiter und kleiner in der Zeit $t > 0$. (Für $t \gg 1$ fast flach.)