16a) Für $x \to \pm\infty$, die Zeitunabhängige Schrödingen Gleichung lautet:

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi + V_\pm\psi$$

Diese hat Lösungen: $e^{ik_\pm x}$ und $e^{-ik_\pm x}$, wo $k_\pm$ gegeben ist durch: $E - V_\pm = \frac{\hbar^2}{2m}k_\pm^2$,

d.h.: $k_\pm = \sqrt{2m(E-V_\pm)}$

Da das Teilchen von links nach rechts bewegt ist die eingehende Welle e^{ikx} aus $x\to\infty$ vorgegeben. Wenn es am $x\to\infty$ ist angeland, gibt es keine Kraft die es wie zurück schicken werdet. Also

$$\psi(x) = e^{ik_-x} + A_- e^{-ik_-x}, \quad x \to -\infty$$

und

$$\psi(x) = A_+ e^{ik_+x}, \quad x\to\infty$$

$A_\pm$ sind von dem Potential abhängig.

16b) $P = |\psi|^2 = |e^{ik_-x} + A_- e^{-ik_-x}|^2 = 1 + |A_-|^2 + A_- e^{-2ik_-x} + A_-^* e^{2ik_-x}$ für $x\to-\infty$

$= |A_+ e^{ik_+x}|^2 = |A_+|^2 \quad x\to\infty$.

$J = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^*\partial_x\psi - \psi\partial_x\psi^*)$. Für $x\to-\infty$:

$$J = \frac{\hbar}{2mi}\Big[(e^{-ik_-x} + A_-^* e^{ik_-x})ik(e^{ik_-x} - A_- e^{-ik_-x}) + -(ik)(-e^{-ik_-x} + A_-^* e^{ik_-x})(e^{ik_-x} + A_- e^{-ik_-x})\Big]$$

$$= \frac{\hbar k_-}{2m}\Big[1 - |A_-|^2 + A_-^* e^{2ik_-x} - A_- e^{-2ik_-x} + 1 - |A_-|^2 - A_-^* e^{2ik_-x} + A_- e^{-2ik_-x}\Big] = \frac{\hbar k_-}{m}\big[1 - |A_-|^2\big]$$

Für $x\to\infty$: $J = \frac{\hbar}{2mi}\Big[A_+^* e^{-ik_+x} ik_+ A_+ e^{ik_+x} - (-ik_+)A_+^* e^{-ik_+x} A_+ e^{ik_+x}\Big]$

$= \frac{\hbar k_+}{m}|A_+|^2$.

16c) Für $x\to-\infty$, hat die eingehende Welle einen Strom:

$$J_\to = \frac{\hbar}{2mi}\Big[e^{-ikx}\partial_x e^{ikx} - \partial_x(e^{-ikx})e^{ikx}\Big] = \frac{\hbar k}{m}, \quad x\to-\infty$$

Und die zurückgehende Welle $A_- e^{-ik_-x}$:

$$J_\leftarrow = \frac{\hbar}{2mi}\Big[A_-^* e^{ikx}\partial_x(A_- e^{-ikx}) - \partial_x(A_-^* e^{ikx})A_- e^{-ikx}\Big]$$

$$= \frac{\hbar}{2mi}|A_-|^2(-2ik_-) = -\frac{\hbar k_-}{m}|A_-|^2, \quad x\to-\infty$$

Wir sehen also $J = J_\to + J_\leftarrow$ für $x\to-\infty$.

So eine Unterteilung ist nicht möglich für P da dort Mischterme auftreten.

16d) $j_\rightarrow = j$ für $x \to \infty$, also bekommen wir:

$$T = \left|\frac{j_\rightarrow(x\to\infty)}{j_\rightarrow(x\to-\infty)}\right| = \frac{\frac{\hbar k_+}{m}|A_+|^2}{\frac{\hbar k}{m}} = \frac{k_+}{k}|A_+|^2,$$

$$R = \left|\frac{j_\leftarrow(x\to-\infty)}{j_\rightarrow(x\to-\infty)}\right| = \frac{\frac{\hbar k}{m}|A_-|^2}{\frac{\hbar k}{m}} = |A_-|^2.$$

16e) Die Kontinuitätsgleichung besagt, dass $\partial_t P + \partial_x j = 0$. Da wir hier ein stationäres System betrachten, ist $\partial_t P = 0$. Also $\partial_x j = 0$, d.h. j ist konstant.

Wir wissen also, dass die asymptotischen Werte des Stroms gleich sind:

$$j_\rightarrow(x\to-\infty) + j_\leftarrow(x\to-\infty) = j_\rightarrow(x\to\infty)$$

$$\frac{\hbar k}{m} - \frac{\hbar k}{m}|A_-|^2 = \frac{\hbar k_+}{m}|A_+|^2 \Rightarrow |A_-|^2 + \frac{k_+}{k}|A_+|^2 = 1$$

Umschreiben gibt: $R + T = 1$ ✓

17a) $\psi(0) = \psi(2\pi R)$, $\partial_x\psi(0) = \partial_x\psi(2\pi R)$

17b) $\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$, $k = \sqrt{2mE}/\hbar$

Randbedingungen benützen:

$$A + B = Ae^{2\pi i kR} + Be^{-2\pi i kR}$$

$$ik(A-B) = ik(Ae^{2\pi i kR} - Be^{-2\pi i kR})$$

$k=0$ ist eine Lösung, für $k \neq 0$ finden wir

$$A + B = Ae^{2\pi i kR} + Be^{-2\pi i kR}$$

$$A - B = Ae^{2\pi i kR} - Be^{-2\pi i kR}$$

Addieren oder abziehen gibt:

$$A = Ae^{2\pi i kR}, \quad B = Be^{2\pi i kR}$$

Da A und B $\neq 0$ zu nehmen sind, folgt:

$$e^{2\pi i kR} = 1 = e^{2\pi i n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}R = kR = n \Rightarrow E = \frac{\hbar^2}{2mR^2}n^2.$$

Die Eigenfunktionen sind: $\psi_n(x) = N_n e^{inx/R}$

Normieren: $1 \overset{!}{=} \int_0^{2\pi R} dx\, |\psi_n|^2 = 2\pi R N_n^2 \Rightarrow N_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} e^{inx/R}.$$

18a) Die Zeitunabhängige Schrödingergleichung besagt:

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi(x) - \frac{\hbar^2}{m}D\delta(x)\psi(x)$$

Wenn wir dies integriere um eine infinitesimale Umgebung $[\varepsilon, \varepsilon]$ finden wir:

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi(x) - \frac{\hbar^2}{m}D\delta(x)\psi(x)\right] = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx\, E\psi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\partial_x\psi(\varepsilon) - \partial_x\psi(-\varepsilon)\right) + \frac{\hbar^2}{m}D\psi(0) = 2\varepsilon E\psi(\xi)$$

mit $\xi \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Für $\varepsilon \to 0$ gibt dies:

$$\frac{1}{2}(\psi'(\varepsilon) - \psi'(-\varepsilon)) = D\psi(0) \quad , \quad \varepsilon \to 0$$

Da die Ableitung von ψ discontinue ist, ist ψ selber stetig:

$$\psi(-\varepsilon) = \psi(\varepsilon) = \psi(0) \quad , \quad \varepsilon \to 0.$$

18b) Wir haben 2 Regionen: $x<0$, $x>0$.

$$\psi(x) = e^{ikx} + Ae^{-ikx} \qquad x<0$$
$$\psi(x) = Be^{+ikx} \qquad x>0, \qquad k = \sqrt{2mE}/\hbar$$

Die Randbedingungen geben: $1 + A = B$ und

$$\frac{1}{2}[ik(1-A) - ikB] = DB \Rightarrow \frac{D}{ik} = \frac{1-(B-1)-B}{2B} = \frac{1}{B} - 1$$

$$B = \frac{1}{1+\frac{D}{ik}} = \frac{ik}{D+ik} \quad , \quad A = -\frac{D}{ik+D}$$

Aus Aufgabe 16d): $T = |B|^2 = \frac{k^2}{k^2+D^2}$, $R = \frac{D^2}{k^2+D^2}$

18c) $D<0$, $E<0$. Definiere $d = -D > 0$, $\varkappa = \sqrt{-2mE}/\hbar$

Wieder haben wir 2 Regionen:

$$\psi(x) = A_1 e^{+\varkappa x} + B_1 e^{-\varkappa x} \qquad x<0$$
$$\psi(x) = A_2 e^{+\varkappa x} + B_2 e^{-\varkappa x} \qquad x>0.$$

Da ψ einen gebundenen Zustand darstellen soll, muss ψ integrierbar sein, also insbesondere: $\psi(x) \to 0$ wenn $x \to \pm\infty$. Dies zeigt, dass $B_1 = A_2 = 0$. Also

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{\varkappa x} & x<0 \\ Be^{-\varkappa x} & x>0. \end{cases}$$

Die Randbedingungen sind dann:

$$B = A, \quad \frac{\varkappa}{2}(A-(-)B) = DA \Rightarrow \varkappa = D.$$

18c cont.) Diese Lösung ist also eindeutig.

$$\frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} = D \Rightarrow E = -\frac{\hbar^2}{2m} D^2 .$$

Den normierte Eigenzustand bekommen wir aus:

$$\psi(x) = A e^{-D|x|} ,$$

$$1 \stackrel{!}{=} \int dx \, |\psi|^2 = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-2D|x|} = 2A^2 \int_0^{\infty} e^{-2Dx} dx$$

$$= \frac{A^2}{D} \Rightarrow A = \sqrt{D}$$

$$\psi(x) = \sqrt{D} \, e^{-D|x|} .$$