Prof. Curio, Dr. Groot Nibbelink

Aufgabe 28 "Laguerre-Polynomen"

Die Laguerre-Polynomen sind definiert als $P_p^k(z) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k} L_p(z), \qquad L_p(z) = e^z \frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}z^p}(z^p e^{-z})$.

a. Berechne: $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}(e^{-z})$, $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}(z^l)$ und $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}(AB)$ für beliebige Funktionen A und B von z.

b. Zeige mit Hilfe von 28a, dass die Laguerre Polynomen L_p^k die folgende Polynomentwicklungen haben:

$$L_p^k(z) = \sum_{m=0}^{p-k} \frac{(-)^{k+m}(p!)^2}{(p-k-m)!(k+m)!m!} z^m.$$

c. Zeige hiermit, dass die Laguerre-Polynomen die Differentialgleichung lössen:

$$\Big[z\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} + (k+1-z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + p - k\Big] L_p^k(z) = 0. \tag{1}$$

Aufgabe 29 "Wasserstoffatom in eine Dimension"

Die Schrödinger-Gleichung für das eindimensionales Wasserstoffatom ist gegeben durch

$$\Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \frac{e^2}{|x|}\Big]\psi(x) = E\psi(x). \tag{2}$$

In dieser Aufgabe suchen wir die gebundene Zustände dieses Systems.

a. Zeige, dass die Schrödinger-Gleichung sich mit eine Skalierung $x = \beta z$ darstellen lässt wie

$$\Big[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{4} + \frac{\alpha}{|z|}\Big]\psi(z) = 0, \quad \text{mit} \quad E = -\frac{me^4}{2\hbar^2}\frac{1}{\alpha^2}. \tag{3}$$

b. Argumentiere, dass $\psi(z)$ für $z \to \infty$ abfällt wie $\psi(z) \sim e^{-z/2}$.

c. Für $z > 0$ mache den Ansatz $\psi(z) = \phi(z)\, z e^{-z/2}$. Zeige dass, ϕ die Laguerre-Differentialgleichung (1) erfüllt und bestimme p und k.

d. Benütze die Reflexionssymmetry der Gleichung (2) um Lösungen zu finden für $z < 0$ falls die Lösungen für $z > 0$ bekannt sind. Was sind die Anschlussbedingung(en) für $z = 0$?

e. Bestimme die Energieeigenwerte und die (nicht normierte) Eigenzustände.

Aufgabe 30 "Runge-Lenz-Vektor"

Für das Wasserstoffatom kann mann neben den Hamilton-Operator $H = \frac{1}{2m}\vec{p}^2 - k/r$ und den Drehimplus $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ noch einen weiteren Operator definieren: Der Runge-Lenz-Vektor

$$\vec{K} = \frac{1}{2m}\Big(\vec{L} \times \vec{p} - \vec{p} \times \vec{L}\Big) + k\frac{\vec{r}}{r}.$$

a. Zeige, dass $\vec{K}$ einen hermitischen Operator ist.

b. Benütze Aufgabe 25, um zu zeigen, dass $[L_i, K_j] = i\hbar\, \epsilon_{ijk} K_k$.

c. Zeige, dass $\vec{K}$ erhalten ist, d.h. $[H, \vec{K}] = 0$. (*Hinweis:* Berechne zuerst viele Zwischenergebnisse und setzte daraus den Kommutator $[H, \vec{K}]$ zusammen.)