Prof. Curio, Dr. Groot Nibbelink

Aufgabe 31 "Pauli-Matrizen"

Die Pauli-Matrizen σ_i sind gegeben durch

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Eine Quaternion A kann dargestellt werden als: $A = a_0 \mathbb{1} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}$ mit $a_0, a_i \in \mathbb{R}$.

a. Zeige, dass die Pauli-Matrizen eine $SU(2)$ Lie-Algebra bilden: $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\,\sigma_k$.

b. Zeige, dass die Pauli-Matrizen auch eine Clifford-Algebra bilden: $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\,\delta_{ij}$.

c. Sei $C = AB$ ein Produkt zwei Quaternionen A und B. Berechne Pauli-Matrizenentwicklung von C.

d. Zeige, dass $a_0 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A)$ und $a_i = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\sigma_i A)$.

e. Bestimme die Matrix R_{ij} sodass: $e^{i\,\vec{e}\cdot\vec{\sigma}}\,\sigma_i\,e^{-i\,\vec{e}\cdot\vec{\sigma}} = R_{ij}\,\sigma_j$. (*Hinweis:* Benütze Aufgabe 13b.)

Aufgabe 32 "Spin-$\frac{1}{2}$ Hilbert-Raum"

Betrachte ein Spin-$\frac{1}{2}$ Hilbert-Raum. Sei $\vec{e}$ ein Richtungsvektor mit $\vec{e}^2 = 1$ und ρ ein Dichtematrix

$$\rho = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\vec{e}\cdot\vec{\sigma} \quad \text{und} \quad |\chi\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ (1+i)/2 \end{pmatrix}.$$

a. Zeige, dass ρ einen puren Zustand definiert.

b. Für welche Raumrichtungen $\vec{e}$ besitzt der Spinprojektion des Zustands $|\chi\rangle$ die Unschärfe null?

Aufgabe 33 "Ritzsches Verfahren"

Sei $V(x) = \infty$ für $x < 0$ und $V(x) = \frac{\hbar^2}{2m} c\,x$ für $x \geq 0$ mit $c > 0$. In dieser Aufgabe benützten wir das Ritzsche Verfahren um eine Näherung der Grundzustandenergie E_0 zu bestimmen mit der Versuchsfunktionen für $x \geq 0$:

$$\psi(x) = x\,e^{-\alpha x}, \qquad \alpha > 0.$$

a. Warum sind diese Versuchsfunktionen geeignet, eine brauchbare Näherung für E_0 zu liefern?

b. Wende das Variationsverfahren an um E_0 zu bestimmen. (*Hinweis:* $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^n\, e^{-a\,x} = \frac{n!}{a^n}$.)