T2–Quantenmechanik - Übungszettel 12 - WiSe 09/10

Prof. Curio, Dr. Groot Nibbelink

Aufgabe 34 "WKB im Potentialtopf"

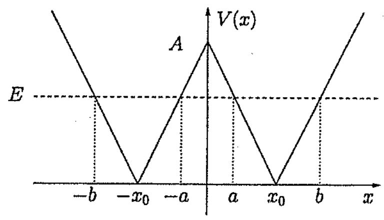
Betrachte ein Teilchen mit Masse m und Energie E im Potentialtopf $V(x)$. An der Punkte a und b sind das Potential und die Energie gleich. Die WKB-Anschlußformeln sind in Tabel 1, siehe Hinterseite.

a. Leite die Quantisierungsbedingung $\int_a^b k(x)\mathrm{d}x = (n + \frac{1}{2})\pi$ her.

b. Vergleiche diese Bedienung mit die Bohr-Sommerfeld Quantisierung.

c. Berechne hiermit die Energieeigenwerte für $V(x) = c|x|$, $E, c > 0$.

Aufgabe 35 "WKB für ein Potential mit zwei Minima"



Betrachte ein Teilchen mit Masse m und Energie $0 < E < A$ im Potential:

$$V(x) = \begin{cases} -c(x + x_0) & x < -x_0, \\ A - c|x| & -x_0 < x < x_0, \qquad A, c > 0 \\ c(x - x_0) & x > x_0 = A/c, \end{cases}$$

a. Argumentiere die WKB-Wellenfunktion im Region $a < x < b$ gegeben ist durch

$$\phi(x) = \begin{cases} 2\frac{C}{\sqrt{k(x)}} \sin\left(\int_x^b k(x)\mathrm{d}x + \frac{\pi}{4}\right) \\ 2\frac{D}{\sqrt{k(x)}} \sin\left(\int_a^x k(x)\mathrm{d}x + \frac{\pi}{4} + \beta\right) \end{cases}$$

mit einem freien Parameter β.

b. Berechne die resultierende Energiequantisierungsbedingung.

c. Zeige dass β für grade und ungrade Wellenfunktion gegeben ist durch

$$\tan\beta = \pm\frac{1}{2}\exp\Big(-\frac{4}{3}\frac{\sqrt{2m}}{\hbar c}(A - E)^{3/2}\Big).$$

Aufgabe 36 "Elektromagnetische Potentialen"

Betrachte ein Teilchen mit Masse m in einem elektromagnetischen Feld mit konstante Vektorpotential $\vec{A}$ und Skalarpotential ϕ.

a. Bestimme die Lösungen der Schrödingergleichung mit potential $V(\vec{r}) = 0$.

b. Berechne die korrespondierendelektrische und magnetische Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$.

c. Bestimme ein Eichtransformation die die Vektor- und Skalarpontentialen zu null setzt.

d. Berechne die Phase die die Wellenfunktion bekommt durch diese Eichtransformation. Vergleich dieses Ergebnis mit der Wellenfunktion konstruiert in 36a.

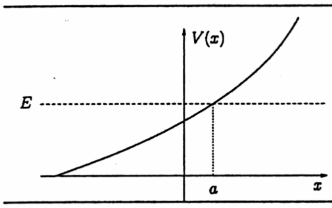
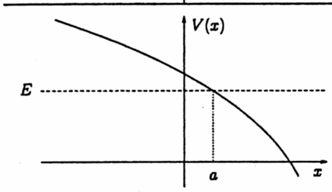
	$x < a$	$x > a$
	$\frac{2}{\sqrt{k(x)}} \sin\left(\int_x^a k(x)\mathrm{d}x + \frac{\pi}{4} \right) \quad \leftarrow$ $\frac{1}{\sqrt{k(x)}} \cos\left(\int_x^a k(x)\mathrm{d}x + \frac{\pi}{4} \right) \quad \leftarrow$	$\rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \exp\left(- \int_a^x \kappa(x)\mathrm{d}x \right)$ $\rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \exp\left(+ \int_a^x \kappa(x)\mathrm{d}x \right)$
	$\frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \exp\left(- \int_x^a \kappa(x)\mathrm{d}x \right) \quad \leftarrow$ $\frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \exp\left(+ \int_x^a \kappa(x)\mathrm{d}x \right) \quad \leftarrow$	$\rightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{k(x)}} \sin\left(\int_a^x k(x)\mathrm{d}x + \frac{\pi}{4} \right)$ $\rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{k(x)}} \cos\left(\int_a^x k(x)\mathrm{d}x + \frac{\pi}{4} \right)$

Table 1: WKB-Anschlußformeln wobei: $k(x) = \sqrt{2m(E - V(x)}/\hbar$ für $E > V(x)$ und $\kappa(x) = \sqrt{2m(V(x) - E}/\hbar$ für $E < V(x)$.