T2–Quantenmechanik - Übungszettel 2 - WiSe 09/10

Prof. Curio, Dr. Groot Nibbelink

Aufgabe 4 "Bohr-Sommerfeld Quantisierung"

Für konjugierte Variablen p und q gibt es die semiklassische Bohr-Sommerfeld-Quantisierungsregel, die besagt, dass

$$\oint \mathrm{pdp} = n\,h, \qquad n = 1, 2, 3, \dots,$$

wo über einen ganzen Durchlauf integriert wird. Wir möchten diese Regel auf einfache eindimensionale Systeme anwenden, die ein Teilchen mit Masse m in verschiedenen Potentialen $V(x)$ beschreiben.

a. Bestimme die Energiequantisierung für ein Potential $V(x) = 0$ for $0 < x < a$ und ansonsten $V(x) = \infty$.

b. Bestimme die Bohr-Sommerfeld-Energiequantisierung für einen mit Potential $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$, $x > 0$ und $V(x) = \infty$, $x \leq 0$. Wie verhalten sich dieses Ergebnis zum Spektrum des harmonischen Oszillators?

c. Zeige, dass die Bohr-Sommerfeld-Quantisierung für den Potential $V(x) = A|x|$ zum folgenden Spektrum führt:

$$E_n = \left(\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}\right)^{2/3} \left(\frac{A^2\hbar^2}{m}\right)^{1/3} n^{2/3}.$$

Aufgabe 5 "Mexikanischer Hut"

Betrachte ein Teilchen mit Masse m in zwei Dimensionen in einem Potential

$$V(x, y) = \frac{a}{2}(x^2 + y^2 - R^2)^2,$$

a. Mache eine Skizze des Potentials.

b. Wo ist das Teilchen, wenn der Parameter a viel größer wird als die Energie: $E << \frac{a}{2}R^4$.

Introduziere Polarkoordinaten $x = r\cos\theta$ und $y = r\sin\theta$, mit $r > 0$ und $0 < \theta < 2\pi$.

c. Bestimme die konjugierte Impulsen zu der Polarkoordinaten r und θ. Berechne der Hamiltonian in Polarkoordinaten.

d. Benütze Bohr-Sommerfeld, um das Energiespektrum im Limes $a \to \infty$ zu bestimmen.

Aufgabe 6 "Kontinuitätsgleichungen"

Sei $\Psi(\vec{r}, t)$ eine glatte Wellefunktion, die die Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}\Psi, \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(\vec{r})$$

erfüllt mit $\vec{r} = (x, y, z)$ und $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$. Nehme an, dass $\Psi(\vec{r}, t), \vec{\nabla}\Psi(\vec{r}, t) \to 0$ für $|\vec{r}| \to \infty$. Sei $P = |\Psi|^2$ die Wahrscheinlichkeitsdichte und $\vec{J} = \frac{\hbar}{2mi}(\Psi^*\vec{\nabla}\Psi - \vec{\nabla}\Psi^*\Psi)$ Wahrscheinlichkeitsstrom.

a. Zeige, dass die Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial}{\partial t}P + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$ gilt.

b. Argumentiere, dass die totale Wahrscheinlichkeit $N = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,P$ erhalten ist und deshalb man Ψ so normieren kann, dass die totale Wahrscheinlichkeit $N = 1$ für jede Zeit t.

Führe die Energiedichte $\mathcal{E} = \Psi^*\hat{H}\Psi$ und Energiestrom $\vec{\mathcal{J}} = -\frac{\hbar}{2mi}(\vec{\nabla}\Psi^*\hat{H}\Psi - \Psi^*\vec{\nabla}\hat{H}\Psi)$ ein.

c. Zeige, dass auch diese Größen eine Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{E} + \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{J}} = 0$ erfüllen.