T2–Quantenmechanik - Übungszettel 3 - WiSe 09/10

Prof. Curio, Dr. Groot Nibbelink

Aufgabe 7 "Gaußsches Wellepaket"

Ein Quantenteilchen hat am Zeitpunkt $t = 0$ eine gaußsche Wellefunktion, die um x_0 verteilt ist:

$$\Psi(x) = N\, e^{-\frac{a}{2}(x-x_0)^2}$$

a. Erkläre, wieso man annehmen darf, dass die Konstante N reell ist. Bestimme diese Konstante N sodass die Wellefunktion Ψ normiert ist. (D.h. $P = |\Psi|^2$ definiert eine Wahrscheinlichkeit.)

Der Erwartungswert $\langle \hat{A} \rangle$ eines Operators $\hat{A}$ ist definiert durch $\langle \hat{A} \rangle = \int \mathrm{d}x\, \Psi^* \hat{A} \Psi$. Die Unschärfe ΔA eines Operators $\hat{A}$ wird bestimmt aus dem Erwartungswert $\Delta A^2 = \langle \Delta \hat{A} \rangle$ der Variation $\Delta \hat{A} = (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2$ dieses Operators.

b. Berechne die Erwartungswerte $\langle \hat{x} \rangle$ und $\langle \hat{p} \rangle$. (Der Positionsoperator $\hat{x}$ wird dargestellt als Multiplikation mit x und der Impulsoperator als $\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.)

c. Berechne die Unschärfe von $\hat{x}$ und $\hat{p}$.

d. Überprüfe damit ob die Heisenberg-Unschärferelation $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ erfüllt ist.

Aufgabe 8 "Hamilton- und Ehrenfest-Gleichungen"

In der klassischen Mechanik wird ein eindimensionales System durch einen Lagrangian $L(x, \dot{x})$ oder Hamiltonian $H(x, p) = p\dot{x} - L(x, \dot{x})$ beschrieben, wo $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$.

a. Leite die Euler-Lagrange Bewegungsgleichung her aus dem Variationsprinzip.

b. Zeige, dass der Hamiltonian $H(x, p)$ keinen Funktion von $\dot{x}$ ist.

c. Leite der Hamilton-Gleichungen her: $\dot{x} = \dfrac{\partial}{\partial p} H, \quad \dot{p} = -\dfrac{\partial}{\partial x} H.$

Die Ehrenfest-Gleichungen sind eine quantenmechanische Analogie der klassische Hamilton-Gleichungen für die Erwartungswerte $\langle \hat{x} \rangle$ und $\langle \hat{p} \rangle$ der Position- und Impulsoperatoren. Die Wellefunktion $\Psi(x, t)$ erfüllt der Schrödinger-Gleichung: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{H}\, \Psi$, wo $\hat{H}$ die Hamilton-Operator darstellt.

d. Zeige für eine Operatorfunktion $\hat{F} = F(\hat{x}, \hat{p})$, dass: $[\hat{x}, \hat{F}] = i\hbar \dfrac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{p}}, \quad [\hat{p}, \hat{F}] = -i\hbar \dfrac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{x}}.$

e. Leite die Ehrenfest-Gleichungen her: $\dfrac{\mathrm{d}\langle \hat{x} \rangle}{\mathrm{d}t} = \left\langle \dfrac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{p}} \right\rangle, \quad \dfrac{\mathrm{d}\langle \hat{p} \rangle}{\mathrm{d}t} = -\left\langle \dfrac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{x}} \right\rangle.$

Aufgabe 9 "Die Fourier-Transformation der δ-Funktion"

Sei $f(x)$ eine beliebige glatte Funktion von x, die $f(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$. Die Fourier- und inverse Fourier-Transformation sind gegeben durch

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \mathrm{d}x\, e^{-ipx/\hbar} f(x), \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \mathrm{d}x\, e^{ipx/\hbar} \tilde{f}(p).$$

a. Ziege, dass die Fourier-Transformation genau die Entwicklung der Funktion $f(x)$ in Eigenfunktionen der Impulsoperator $\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ darstellt.

Die δ-Funktion $\delta(x)$ ist definiert sodass für jede glatte Funktion f: $\displaystyle\int \mathrm{d}x\, \delta(x - x')\, f(x) = f(x')$.

b. Erkläre wieso die δ-Funktion gar keine Funktion ist.

c. Zeige, dass die δ-Funktion sich schreiben lässt wie eine Fourier-Transformierte:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \mathrm{d}p\, e^{-ipx/\hbar}.$$