T2–Quantenmechanik - Übungszettel 4 - WiSe 09/10

Prof. Curio, Dr. Groot Nibbelink

Aufgabe 10 "Gram-Schmidt Orthogonalisierung"

Sei $\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}$ ein Set unabhäniger Zustände aus einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit Innerprodukt $\langle *, * \rangle$. Das Gram-Schmidt-Verfahren macht daraus ein orthonormales Set $\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$. (Diese Methode lässt sich leicht zu einer beliebigen Anzahl von Zustände erweitern.)

a. Bestimme $N_1 > 0$ in $N_1 \Psi_1 = \Phi_1$, sodass Ψ_1 normiert ist: $\langle \Psi_1, \Psi_1 \rangle = 1$.

b. Zeige, dass $N_2 \Psi_2 = \Phi_2 - \langle \Psi_1, \Phi_2 \rangle \Psi_1$ senkrecht steht auf Ψ_1, und bestimme $N_2 > 0$.

c. Zeige, dass $N_3 \Psi_3 = \Phi_3 - \langle \Psi_1, \Phi_3 \rangle \Psi_1 - \langle \Psi_2, \Phi_3 \rangle \Psi_2$ senkrecht steht auf Ψ_1 und Ψ_2.

d. Konstruiere drei orthonormale Zustände aus $\Phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\Phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\Phi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 11 "Energieobservable"

Ein Hamiltonoperator $\hat{H}$ habe bzgl. der orthonormale Basis $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$, $|\psi_3\rangle$ die Matrixdarstellung

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E & i\varepsilon/\sqrt{2} & 0 \\ -i\varepsilon/\sqrt{2} & E & i\varepsilon/\sqrt{2} \\ 0 & -i\varepsilon/\sqrt{2} & E \end{pmatrix}, \qquad E > \varepsilon > 0.$$

a. Bestimme die Eigenwerte $E_+ > E_0 > E_-$ dieses Hamiltonoperators. Zeige, dass $\hat{H}$ positiv definit ist.

b. Bestimme die normierte Energieeigenzustände $|E_+\rangle$, $|E_0\rangle$, $|E_-\rangle$.

c. Berechne die Wahrscheinlichkeiten, dass bei einer Energiemessung der Zustand $|\psi_1\rangle$ Energieeigenwerte E_+, E_0, E_- annehmen wird.

Aufgabe 12 "Entropie eines verschrnkten Zustandes"

Ein quantumstatisches Ensemble ist definiert durch eine Dichtematrix $\hat{\rho}$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. $S = -k\mathrm{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho})$ ist die Entropie dieses Ensembles.

a. Zeige, dass immer $S \geq 0$, und $S = 0$ für einen puren Zustand.

Sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ das Tensorprodukt zwei Hilberträume $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$. Sei $|\psi_n$ ein Basis für $\mathcal{H}_1$ und ϕ_α für $\mathcal{H}_2$.

b. Zeige, dass für ein Ensemble mit $\hat{\rho} = \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2$, die Entropie gegeben ist durch $S = S_1 + S_2$.

Ein verschränkte Zustand in $\mathcal{H}$ lässt sich nicht als ein Tensorprodukt zwei Zustände aus $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$. Betrachte $|\Psi\rangle = \big(|\psi_1\rangle|\phi_1\rangle + |\psi_2\rangle|\phi_2\rangle\big)/\sqrt{2}$, wo $|\psi_n\rangle \in \mathcal{H}_1$ und $|\phi_\alpha\rangle \in \mathcal{H}_2$ orthonormale Zustnde darstellen.

c. Definiert $|\Psi\rangle$ einen puren Zustand? Zeige, dass $|\Psi\rangle$ verschränkt ist.

d. Bestimme eine Dichtematrix $\hat{\rho}_1$ auf $\mathcal{H}_1$ so, dass $\langle \Psi | \hat{A}_1 | \Psi \rangle = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}_1 \hat{A}_1)$ für jeden Operator $\hat{A}_1$, die nur auf $\mathcal{H}_1$ wirkt.

e. Berechne die Entropie S_1, die mit $\hat{\rho}_1$ korrespondiert.