T2–Quantenmechanik - Übungszettel 5 - WiSe 09/10

Prof. Curio, Dr. Groot Nibbelink

Aufgabe 13 "Exponentialfunktion von Operatoren"

Sei $\hat{A}$ und $\hat{B}$ zwei Operatoren. Die Lie-Ableitung $L_{\hat{A}}$ ist definiert durch: $L_{\hat{A}}(\hat{B}) = [\hat{A}, \hat{B}]$.

a. Zeige, dass $F(e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}}) = e^{\hat{A}}F(\hat{B})e^{-\hat{A}}$ für ein beliebige analytische Funktion $F(x)$.

b. Zeige, dass $e^{\lambda\hat{A}}\hat{B}e^{-\lambda\hat{A}} = e^{\lambda L_{\hat{A}}}(\hat{B})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (*Hinweis:* Bestimme eine erste Ordnung Differentialgleichung in λ für beide Seiten der Gleichung.)

c. Zeige, dass $e^{\lambda\hat{A}}e^{\lambda\hat{B}} = e^{\lambda(\hat{A}+\hat{B})}e^{-\lambda^2[\hat{A},\hat{B}]/2}$, falls $\hat{A}$ und $\hat{B}$ mit $[\hat{A}, \hat{B}]$ vertauschen.

d. Sei $\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$ die Hamiltonoperator eines harmonischen Oszillators. Berechne die Impulsoperator $\hat{p}_H(t)$ in Heisenbergbild.

Aufgabe 14 "Entartung"

In diesem Aufgabe zeigen wir den Satz: Ein Hamilton-Operator $\hat{H}$, der mit zwei hermiteschen Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ vertauscht, welche aber untereinander nicht vertauschen:

$$[\hat{H}, \hat{A}] = [\hat{H}, \hat{B}] = 0, \qquad [\hat{A}, \hat{B}] = i\,\hat{C} \neq 0,$$

hat im allgemeinen ein entartetes Spektrum. Sei $|n\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{H}$ mit Eigenwert E_n.

a. Zeige, dass $\hat{A}|n\rangle$ und $\hat{B}|n\rangle$ Eigenzustände von $\hat{H}$ zum Eigenwert E_n sind.

Dass wir zwei Zustände mit gleichem Eigenwert haben, heißt noch nicht, dass dieses Spektrum tatsächlich entartet ist. Dafür müssen die beide Zustände linear unabhängig sein. Der Beweis geht von der Annahme des Gegenteils aus und führt auf einen Widerspruch: Seien also beide Zustände linear abhängig, d.h: $\hat{B}|n\rangle = \alpha\,\hat{A}|n\rangle \neq 0$ für $\alpha \neq 0$.

b. Zeige, dass: $\langle n|(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})|n\rangle = (\alpha - \alpha^*)\langle n|\hat{A}^2|n\rangle$. Zeige auch, dass $\alpha \in \mathbb{R}$.

c. Argumentiere, dass für einen Zustand $|n\rangle$, für den $\langle n|\hat{C}|n\rangle \neq 0$, das Spektrum entartet ist.

Aufgabe 15 "Zeitevolution eines Gauß' ischen Wellepaket"

Betrachte das Gauß' ische Wellenpaket $\psi(x,0) = (a/\pi)^{1/4}e^{-\frac{a}{2}(x-x_0)^2}$ als Wellenfunktion $\psi(x,t)$ zur Zeit $t = 0$. Wir möchte berechnen wie $\psi(x,t)$ aussieht zur Zeit t für ein freies Teilchen mit Potential $V(x) = 0$.

a. Bestimme E, so dass $\phi_p(x,t) = e^{-i(Et-px)/\hbar}$ eine Lösung der Schrödinger-Gleichung ist.

b. Entwickle $\psi(x,0)$ in den $\phi_p(x,0)$, wie in Aufgabe 9.

c. Benütze das Superpositionsprinzip, um eine ähnliche Entwicklung am Zeitpunkt t zu bestimmen.

d. Berechne hieraus $\psi(x,t)$ explizit als Funktion von x und zeige, dass

$$|\psi(x,t)|^2 = \sqrt{\frac{a/\pi}{1 + \left(\frac{a\hbar t}{m}\right)^2}}\, \exp\left\{-\frac{a}{1 + \left(\frac{a\hbar t}{m}\right)^2}(x - x_0)^2\right\}.$$

e. Beschreibe wie die Wahrscheinlichkeit in der Zeit evoluviert.