T2–Quantenmechanik - Übungszettel 7 - WiSe 09/10

Prof. Curio, Dr. Groot Nibbelink

Aufgabe 19 "Teilchen im Gitter"

Betrachte ein Teilchen mit Energie $E > 0$ auf einen Gitter mit Gitterkonstante a und Kopplung D. Definiere: $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. Das Potential dieses periodischen Problems ist gegeben durch

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{m} D \sum_n \delta(x + n\,a)\ , \qquad D > 0.$$

Das Bloch-Theorem besagt, dass jede Energieeigenfunktion für ein periodisches Potential die Eigenschaft besitzt, dass für einen bestimmten Wert der Quasikreiswellenzahl $K \in [-\pi/a, \pi/a[$ gilt:

$$\psi(x + na) = e^{in\,Ka}\,\psi(x),$$

a. Leite das Blochtheorem her. (Hinweis: Benütze Eigenschaften des Translationsoperators: $T_{pa}\psi(x) = \psi(x + pa)$.)

b. Zeige, dass die Energieeigenwerte bestimmt werden durch: $\cos Ka = \cos ka + (D/k)\sin ka$.

c. Zeige, dass es getrennte Energiebänder gibt, d.h. Werte der Energie die keinen Eigenfunktionen entsprechen.

Aufgabe 20 "Nullstellen gebundener Zustände"

Sei $V(x)$ ein stetiges Potential mit $V(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$. Ein gebundener Zustand hat $E < 0$. Die Wronski-Determinante $W(\psi_1, \psi_2)$ ist definiert für zwei Lösungen ψ_1, ψ_2 der Schrödinger-Gleichung mit Energieeigenwerten E_1, E_2 als

$$W(\psi_1, \psi_2) = \frac{\hbar^2}{2m}\begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_1' & \psi_2' \end{vmatrix}.$$

a. Zeige, dass $W(\psi_1, \psi_2)\Big|_a^b = (E_1 - E_2)\int_a^b \mathrm{d}x\,\psi_1\psi_2$.

b. Zeige, dass ψ_2 mit $E_1 < E_2 < 0$ eine Nullstelle hat zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von ψ_1.

c. Sei $\{\phi_n\}$ die Sammlung der gebundenen Zustände. ϕ_n hat $n-1$ Nullstellen. Argumentiere, dass Energieeigenwerte dieser Zustände geordnet sind wie: $E_1 < E_2 < \ldots < 0$.

Aufgabe 21 "Spiegelsymmetrisches Potential"

Betrachte ein Teilchen in einem spiegelsymmetrischen Potential $V(-x) = V(x)$. Der Paritätsoperator $\hat{P}$ ist definiert durch $\hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$. Gerade und ungerade Wellenfunktionen $\psi_\pm(x)$ sind die Eigenfunktionen dieses Operators.

a. Zerlegen eine Energieeigenzustand ψ_E der Schrödinger-Gleichung in gerade und ungerade Funktionen $\psi_{E,\pm}$. Zeige, dass $\psi_{E,\pm}$ auch Lösungen der Schrödinger-Gleichung sind und $\psi_{E,-}(0) = 0$.

Sei das Potential U definiert als: $U(x) = \infty$ für $x < 0$ und $U(x) = V(x)$ für $x \geq 0$.

b. Bestimme die Energieeigenzustände im Potential U für den Fall, dass alle Energieeigenzustände ψ_E im Potential V bekannt sind.

c. Bestimme die Energieeigenwerten des "halben" harmonischen Oszillators mit Potential: $U(x) = \infty, x < 0$, $U(x) = kx^2/2, x \geq 0$.