T2–Quantenmechanik - Übungszettel 8 - WiSe 09/10

Prof. Curio, Dr. Groot Nibbelink

Aufgabe 22 "Spektrum des harmonischen Oszillators"

Sei $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ die Erzeugung- und Vernichtungsoperatoren eines harmonischen Oszillators. $|n\rangle$ sind die normierte Eigenzustände der Besetzungszahloperator $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$: $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$.

a. Zeige, dass die Besetzungszahleigenwerte n nicht negativ und ganzzahlig sind.

b. Zeige, dass $\hat{a}|0\rangle = 0$ und erkläre damit wieso man aus $|n\rangle, n \in \mathbb{N}$ nie Zustände bekommen kannst mit negativen Besetzungszahlen.

c. Zeige, dass das Spektrum von $\hat{N}$ von oben unbegrenzt und nicht entartet ist.

Aufgabe 23 "Generierende Funktion der hermitischen Polynomen"

Sei in dieser Aufgabe die hermitische Polynomen $H_n(z)$ definiert durch die generierende Funktion:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{s^n}{n!} H_n(z) \;:=\; e^{-s^2+2sz}.$$

a. Zeige, dass $H_n(z)$ die Differentialgleichung $\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} - 2z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + 2n\right] H_n(z) = 0$ erfüllt.

b. Überprüfe die Rekursionsrelationen: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} H_n(z) = 2n\, H_{n-1}(z)$, $H_{n+1}(z) = 2z\, H_n(z) - 2n\, H_{n-1}(z)$.

c. Leite die Orthogonalitätsrelationen her: $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z\, e^{-z^2} H_n(z) H_m(z) = \sqrt{\pi} 2^n n!\, \delta_{nm}$.

d. Zeige, dass $H_n(z)$ darzustellen sind als:: $H_n(z) = e^{z^2}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^n e^{-z^2}$.

Aufgabe 24 "Expansion eines Wellenpakets"

Sei $\Psi(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} e^{-(z-z_0)^2/2}$ ein Wellenpaket mit $z = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$. Dieses Wellenpaket möchten wir entwicklen in Eigenzustände des harmonischen Oszillators

$$\phi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} (2^n n!)^{-1/2} H_n(z) e^{-z^2/2}.$$

a. Benütze die generierde Funktion aus Aufgabe 23 um zu zeigen, dass

$$\Psi(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\left(\frac{z_0}{2}\right)^n e^{-z_0^2/4} H_n(z) e^{-z^2/2}.$$

b. Zeige hiermit, dass $P_n = \frac{1}{n!}\left(z_0^2/2\right)^n e^{-z_0^2/2}$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass beim Messung $\hat{N}$ den Wert n annimmt.

c. Überprüfe, dass $\sum_{n\geq 0} P_n = 1$ und berechne den Erwartungswert der Operator $\hat{N}$.