T2–Quantenmechanik - Übungszettel 9 - WiSe 09/10

Prof. Curio, Dr. Groot Nibbelink

Aufgabe 25 "Drehimpulsoperatoren"

Sei ϵ_{ijk} total antisymmetrisch mit $\epsilon_{123} = 1$ und weiter sei $\delta_{ij} = 1$ wenn $j = i$ und 0 sonst. Die Drehimpulsoperatoren sind $L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k$, wobei implizit über j und k summiert wird.

a. Zeige, dass $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$.

b. Zeige, dass $[L_i, a_j] = i\hbar\epsilon_{ijk} a_k$ für $\vec{a} = \vec{r}$ oder $\vec{p}$.

c. Zeige, dass $[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk} L_k$.

d. Zeige mit einer expliziten Rechnung, dass $[L_i, \vec{A}^2] = 0$ für einen beliebigen Operator $\vec{A}$ mit $[L_i, A_j] = i\hbar\epsilon_{ijk} A_k$. Argumentiere wieso dies so sein soll.

Aufgabe 26 "Parität der Kugelflächenfunktionen"

Die Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ), $r > 0$, $0 \leq \theta < \pi$ und $0 \leq \phi < 2\pi$ sind definiert durch $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$ und $z = r\cos\phi$.

a. Zeige, dass $(r, \theta, \phi) \to (r, \pi - \theta, \phi + \pi)$ Parität $\vec{r} \to -\vec{r}$ darstellt in Kugelkoordinaten.

b. Zeige, dass L_z und $L_\pm = L_x \pm iL_z$ in Kugelkoordinaten gegeben sind als

$$L_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}, \qquad L_\pm = \pm\hbar\, e^{\pm i\phi}\Big[\frac{\partial}{\partial\theta} \pm i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\Big].$$

Bis auf der Normierung sind die Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta, \phi)$ definiert durch die Bedingungen: $L_z Y_l^{\pm l}(\theta, \phi) = \pm l\hbar\, Y_l^{\pm l}(\theta, \phi)$, $L_\pm Y_l^{\pm l}(\theta, \phi) = 0$ und $Y_l^m(\theta, \phi) \sim L_+^{(m+l)} Y_l^{-l}(\theta, \phi)$.

c. Zeige, dass $Y_l^{\pm l}(\theta, \phi) \sim e^{\pm il\phi}\sin^l\theta$.

d. Zeige, dass unter Parität: $Y_l^m(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-)^l Y_l^m(\theta, \phi)$.

Aufgabe 27 "Legendre Polynomen"

Die Legendre Polynomen sind definiert als

$$P_l^m(u) = \frac{(1-u^2)^{\frac{1}{2}m}}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^{m+l}}{\mathrm{d}u^{m+l}}(u^2-1)^l, \qquad \int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\, P_k^m P_l^m = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{kl}.$$

a. Zeige, dass $Y_l^m(\theta, \phi) = (-)^m\Big[\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\Big]^{1/2} P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}$ richtig normiert sind.

b. Bestimme all Y_l^m für $l = 0, 1, 2$ und $0 \leq m \leq l$.

c. Expandiere $\Psi(\theta, \phi) = \sin(2\theta)e^{i\phi}$ in Kugelflächenfunktionen.