

**8.21 Korollar.** Ist  $(M_n)$  ein Supermartingal mit  $M_n \geq 0 \forall n \geq 0$ , so konvergiert  $M_n$  gegen einen Grenzwert  $M_\infty$  fast sicher und  $\mathbb{E}[M_\infty] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[M_n] \leq M_0$

*Beweis.*  $(-M_n)_{n \geq 0}$  ist ein Submartingal.  $(-M_n)^+ = 0$  wegen  $M_n \geq 0 \Rightarrow \sup_{n \geq 0} (-M_n)^+ = 0 < \infty$  Nach Martingalkonvergenzsatz:  $M_n \xrightarrow{\text{fast sicher}} M_\infty$ .  
Nach Fatou-Lemma:

$$\mathbb{E}[M_\infty] = \mathbb{E}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} M_n\right] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[M_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[M_n] \leq \mathbb{E}[M_0]$$

konvergiert  $M_n$  gegen  $M_\infty$  auch in  $L_1$ ?  $(X_i)$  iid ZV mit  $P(X_1 = \pm 1) = \frac{1}{2}$ ,  $S_0 = 1, S_n = 1 + \sum_{k=1}^n x_k, n \geq 1$   $(S_n)_{n \geq 0}$  ist ein Martingal.  $N := \inf\{k \geq 1 : S_k = 0\}$  ist eine Stoppzeit.  $\xrightarrow{\text{Satz 8.18}}$  ist ein Martingal, dazu  $\geq 0$ . Nach Korollar 8.21  $S_{N \wedge n} \rightarrow M_\infty$  f.s.  $P(M_\infty = 0) = 1 \implies \mathbb{E}[M_\infty] = 0$  Aber  $\mathbb{E}[S_{N \wedge n}] = 1 \forall n \geq 1$ .  $\square$

**8.22 Beispiel** (Polya Urne).  $r = \#$  rote Kugeln,  $b = \#$  blaue Kugeln,  $R_n = \#$  Anzahl von roten Kugeln, nach der  $n$ -ten Ziehung. Behauptung  $M_n = \frac{r+R_n}{r+b+n}$  Martingal.

*Beweis.*  $\mathcal{F}_n = \sigma(R_0, R_1, \dots, R_n)$

M1)  $M_n = \frac{r+R_n}{r+b+n} = \phi_n(R_n)$  - messbar bzgl.  $\sigma(R_0, R_1, \dots, R_n)$

M2)  $0 \leq M_n \leq 1 \Rightarrow M_n \in L^1$

M3)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1} | R_1 = r_1, R_2 = r_2, \dots, R_n = r_n] \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{r + R_{n+1}}{r + b + n + 1} \mid R_i = r_i \forall i \in [1, n]\right] \\ &= \frac{r + R_n}{r + b + n + 1} + \mathbb{E}\left[\frac{R_{n+1} - r_n}{r + b + n + 1} \mid R_i = r_i \forall i \in [1, n]\right] \\ &= \frac{r + R_n}{r + b + n + 1} + \frac{1}{r + b + n + 1} \frac{r + b}{r + b + n + 1} + \frac{0}{r + b + n + 1} \frac{b + n}{r + b + n + 1} \\ &= \frac{r + R_n}{r + b + n + 1} \left[1 + \frac{1}{r + b + n}\right] = \frac{r + R_n}{r + b + n} \\ \Rightarrow \mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[M_{n+1} | R_0, R_1, \dots, R_n] \\ &= \mathbb{E}[M_{n+1} | R_i = r_i \forall i \in [1, n]]_{r_i = R_i \forall i \in [1, n]} \\ &= \frac{r + R_n}{r + b + n} = M_n \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Nach Korollar 8.21  $M_n \xrightarrow{\text{f.s.}} M_\infty$  Man kann zeigen, dass  $f_{M_\infty}(x) = \frac{(r+b-1)!}{(r-1)!(b-1)!} x^{r-1} (1-x)^{b-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$

□

## 8.2 Martingalungleichungen

**8.23 Satz.** Sei  $(M_n)$  ein Submartingal und  $T$  eine beschränkte Stoppzeit, d.h.  $\exists n \geq 1 : P(T \leq n) = 1$ . Dann gilt:

$$\mathbb{E}[M_0] \leq \mathbb{E}[M_T] \leq \mathbb{E}[M_n]$$

*Beweis.* Nach Satz 8.18 ist  $(M_{T \wedge i})_{i \geq 0}$  ein Submartingal.

$$\Rightarrow \mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_{T \wedge 0}] \leq \mathbb{E}[M_{T \wedge n}] = \mathbb{E}[M_T]$$

$H_i = \mathbb{1}_{\{T \leq i-1\}}, i \geq 1$ . Dies ist eine previsible Folge. Nach Satz 8.14 ist  $((H \circ M)_k)_{k \geq 0}$  ein Submartingal

$$\begin{aligned} (H \circ M)_K &= \sum_{i=1}^K H_i(M_i - M_{i-1}) = \sum_{i=1}^K \mathbb{1}_{\{T \leq i-1\}} M_i - \sum_{i=1}^{K-1} \mathbb{1}_{\{T \leq i\}} M_i \\ &= M_K \mathbb{1}_{\{T \leq K-1\}} - M_0 \mathbb{1}_{\{T \leq 0\}} - \sum_{i=1}^{K-1} M_i \mathbb{1}_{\{T=i\}} \\ &= M_K \mathbb{1}_{\{T \leq K-1\}} - \sum_{i=0}^{K-1} M_i \mathbb{1}_{\{T=i\}} \\ &= M_K - M_K \mathbb{1}_{\{T > K-1\}} - \sum_{i=0}^{K-1} M_i \mathbb{1}_{\{T=i\}} = M_K - M_{T \wedge K} \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[M_n] - \mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_n - M_T] = \mathbb{E}[M_n] - \mathbb{E}[T \wedge n] = \mathbb{E}[(H \circ M)_n] \geq \mathbb{E}[(H \circ M)_0] = 0 \quad \square$$

**8.24 Satz** (Doob'sche Ungleichung). Sei  $M_n$  ein Submartingal. Dann gilt:

$$P(\max_{k \leq n} M_k^+ \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}[M_n \mathbb{1}_{\{\max_{k \leq n} M_k^+ \geq \lambda\}}] \leq \frac{\mathbb{E}[M_n^+]}{\lambda} \forall \lambda > 0, \forall n \geq 1$$

*Beweis.*  $A = \{\max_{k \leq n} M_k^+ \geq \lambda\}$   $N = \inf\{i \geq 0 : M_i^+ \geq \lambda\}$

$$\begin{aligned} \lambda P(A) &\leq \mathbb{E}[M_{N \wedge n} \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[M_{N \wedge n}] - \mathbb{E}[M_{N \wedge n} \mathbb{1}_{A^c}] \\ &\stackrel{\text{Satz 8.23}}{\leq} \mathbb{E}[M_n] - \mathbb{E}\left[\underbrace{M_{N \wedge n}}_{=M_n} \mathbb{1}_{A^c}\right] = \mathbb{E}[M_n(1 - \mathbb{1}_{A^c})] \\ &= \mathbb{E}[M_n \mathbb{1}_A] \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[M_n \mathbb{1}_A] \leq \mathbb{E}[M_n^+]$$

□

8.25 *Beispiel.* Seien  $(X_i)_{i \geq 1}$  unabhängige ZVen mit  $\mathbb{E}[X_i] = 0$  und  $\sigma_i^2 = \mathbb{E}[X_i^2] < \infty$ . Dann gilt:

$$P\left(\max_{k \leq n} |S_k| \geq \lambda\right) \leq \frac{\sum_{k=1}^n \sigma_i^2}{\lambda^2} = \frac{\text{Var}[S_n]}{\lambda^2}$$

$S_n$ -Martingal  $\Rightarrow |S_n|$  submartingal  $\Rightarrow S_n^2$ -Submartingal

$$\begin{aligned} P\left(\max_{k \leq n} |S_k| \geq \lambda\right) &= P\left(\max_{k \leq n} S_k^2 \geq \lambda^2\right) \leq \frac{\mathbb{E}[(S_n^2)^+]}{\lambda^2} \\ &= \frac{\mathbb{E}[S_n^2]}{\lambda^2} = \frac{\text{Var}[S_n]}{\lambda^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

**8.26 Satz.** Ist  $(M_n)_{n \geq 0}$  ein Submartingal, dann gilt für jedes  $p \in (1, \infty)$  die Ungleichung:

$$\mathbb{E}\left[\left(\max_{k \leq n} M_k^+\right)^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|(M_n^+)^p|]$$

**8.27 Korollar.** Ist  $M_n$  ein Martingal, so gilt:

$$\mathbb{E}\left[\left(\max_{k \leq n} M_k\right)^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|(M_n)^p|]$$

*Beweis von Satz 8.26.*  $\overline{M}_n := \max_{k \leq n} M_k^+$ . Für alle  $C > 0$  gilt:

$$\mathbb{E}\left[(\overline{M}_n \wedge C)^P\right] = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} P(\overline{M}_n \wedge C > \lambda) d\lambda$$

$$\begin{aligned} \{\overline{M}_n \wedge C > \lambda\} &= \begin{cases} \emptyset, & C < \lambda \\ \{\overline{M}_n > \lambda\}, & C \geq \lambda \end{cases} \\ P(\overline{M}_n \geq \lambda) &\leq {}^1\mathbb{E}\left[M_n^+ \mathbf{1}_{\{\overline{M}_n \geq \lambda\}}\right] \Rightarrow P(\overline{M}_n \wedge C > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}\left[M_n^+ \mathbf{1}_{\{\overline{M}_n \wedge C > \lambda\}}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbb{E}[(\overline{M}_n \wedge C)^P] &\leq p \int_0^\infty \lambda^{p-2} \mathbb{E}\left[M_n^+ \mathbf{1}_{\{\overline{M}_n \wedge C > \lambda\}}\right] d\lambda \\ &\stackrel{Fub.}{=} \mathbb{E}\left[M_n^+ \int_0^\infty p \lambda^{p-2} \mathbf{1}_{\{\overline{M}_n \wedge C > \lambda\}} d\lambda\right] \\ &= \mathbb{E}\left[M_n^+ \int_0^{\overline{M}_n \wedge C} p \lambda^{p-2} d\lambda\right] \\ &= \mathbb{E}\left[M_n^+ \left(\frac{p}{p-1}\right) (\overline{M}_n \wedge C)^{p-1}\right] \\ &\leq \frac{2}{p-1} \mathbb{E}[(M_n^+)^p]^{\frac{1}{p}} \mathbb{E}[(\overline{M}_n \wedge C)^{q(p-1)}]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Doob'sche Ungleichung

wobei  $q : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow q = \frac{p}{p-1}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbb{E}[(\overline{M}_n \wedge C)^p] &\leq \left(\frac{p}{p-1}\right) \mathbb{E}[(M_n^+)^p]^{\frac{1}{p}} \mathbb{E}[(\overline{M}_n \wedge C)^p]^{\frac{p-1}{p}} \\ \Rightarrow \mathbb{E}[(\overline{M}_n \wedge C)^p]^p &\leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[(M_n^+)^p] \mathbb{E}[(\overline{M}_n \wedge C)^p]^{p-1} \\ \Rightarrow \mathbb{E}[(\overline{M}_n \wedge C)^p] &\leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[(M_n^+)^p] \end{aligned}$$

Nach monotoner Konvergenz:

$$\mathbb{E}[(\overline{M}_n)^p] = \lim_{c \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(\overline{M}_n \wedge C)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[(M_n^+)^p]$$

□

**8.28 Satz** ( $L^p$ -Konvergenz für Martingale). *Sei  $(M_n)$  ein Martingal und sei  $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[|M_n|^p] < \infty$  für ein  $p > 1$ . Dann konvergiert  $M_n$  gegen  $M_\infty$  f.s. und in  $L^p$*

$$\begin{aligned} \text{Beweis. } \mathbb{E}[M_n^+] &\leq \mathbb{E}[|M_n|] \leq (\mathbb{E}[|M_n|^p])^{\frac{1}{p}} \\ \Rightarrow \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[M_n^+] &< \infty \Rightarrow {}^3M_n \xrightarrow{\text{f.s.}} M_\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \underbrace{\left( \max_{k \leq n} |M_k| \right)^p}_3 \right] &\leq {}^4 \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E}[|M_n|^p] \\ &\leq \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[|M_n|^p] = \text{const}(p) < \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow {}^5 \mathbb{E}[(\sup_{k \geq 1} |M_k|)^p] &\leq \text{const}(p) < \infty \Rightarrow \sup_{k \geq 1} |M_k| \in L^p \\ \Rightarrow |M_n - M_\infty|^p &< |M_n|^p + |M_\infty|^\infty \end{aligned}$$

□

---

<sup>3</sup>Martingal Konvergenz-Satz

<sup>4</sup> $\max_{k \leq n} |M_k| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq 1} |M_k|$

<sup>5</sup>monotone Konvergenz