

### 6.3 Konvergenzrate im ZGWS

Seien  $(X_i)$  iid ZVen mit  $\sigma^2 \in (0, \infty)$

ZGWS:

$$P\left(S_n \leq n\mathbb{E}[X_1] + \sqrt{n\sigma^2}x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du =: \phi(x)$$

**6.7 Satz** (Berry-Esseen-Ungleichung). *Seien  $(X_i)$  iid ZVen mit  $\mathbb{E}[|X_1|^3] < \infty$ . Dann gilt:*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P\left(\frac{S_n - n\mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq x\right) - \phi(x) \right| \leq 0.7655 \frac{\mathbb{E}[|X_1|^3]}{(\sigma^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

1

Seien  $(X_i)$  iid ZVen mit  $P(X_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$ . Alle ZVen haben symmetrische Verteilung  $\Rightarrow$  Verteilung von  $S_n$  ist auch symmetrisch,  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(S_{2n} \leq 0) &= 1 - P(S_{2n} > 0) = 1 - P(S_{2n} \geq 0) + P(S_{2n} = 0) \\ &= 1 - P(S_{2n} \leq 0) + P(S_{2n} = 0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(S_{2n} < 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(S_{2n} = 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$\begin{aligned} \sup_x \left| P\left(\frac{S_n}{\sqrt{2n}} \leq x\right) - \phi(x) \right| &\geq P\left(\frac{S_n}{\sqrt{2n}} \leq 0\right) - \underbrace{\phi(0)}_{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} \text{ für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sup_x \left| P\left(\frac{S_n}{\sqrt{2n}} \leq 1\right) - \phi(x) \right| \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Die Konstante in der Berry-Esseen-Ungleichung kann nicht kleiner als  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  sein. (Konstante  $\geq \frac{\sqrt{10}+3}{6\sqrt{2\pi}} \approx 0.45097$ )

**6.8 Lemma.** *Sei  $F$  eine Verteilungsfunktion und  $G$  eine weitere Verteilungsfunktion mit  $G'(x) \leq \lambda < \infty$ . Seien  $\Delta = \sup_x |F(x) - G(x)|$ ,  $\Delta_L = \sup_x \left| \int F(x-u)h_L(u)du - \int G(x-u)h_L(u)du \right|$  wobei  $h_L(x) = \frac{1 - \cos(Lx)}{\pi L x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:*

$$\Delta \leq 2\Delta_L + \frac{24\lambda}{\pi L}, \quad L > 0$$

---

<sup>1</sup>Vor 2007 war die Konstante 0.8

*Beweis.*  $F, G$  sind Verteilungsfunktionen  $\Rightarrow |F(x) - G(x)| \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$   
 $\Rightarrow \exists x_0 : F(x_0) - G(x_0) = \Delta^2$  oder  $F(x_0 - 0) - G(x_0) = -\Delta$   
 $G'(x) \leq \lambda \Rightarrow F(x_0 + s) - G(x_0 + s) \geq \Delta - \lambda S, S \geq 0$   
 Definiere  $\delta = \frac{\Delta}{2\lambda}, t = x_0 + \delta$

$$\Rightarrow F(t - x) - G(t - x) \geq \begin{cases} \frac{\Delta}{2} + \lambda x, & |x| < \delta \\ -\delta, & \text{sonst} \end{cases}$$

Jetzt schätzen wir  $\Delta_L$  nach unten ab.

$$\begin{aligned} \Delta_L &\geq \int_{\mathbb{R}} (F(t - u) - G(t - u)) h_L(u) du \\ &= \int_{\{u: |u| \leq \delta\}} (F(t - u) - G(t - u)) h_L(u) du + \int_{\{u: |u| \geq \delta\}} \dots \\ &\geq \int_{-\delta}^{\delta} \left( \frac{\Delta}{2} + \lambda u \right) h_L(u) du - \Delta \int_{\{u: |u| > \delta\}} h_L(u) du \\ &= \frac{\Delta}{2} \int_{-\delta}^{\delta} h_L(u) du - \Delta \int_{\{u: |u| > \delta\}} h_L(u) du \\ &= \frac{\Delta}{2} \left( 1 - \int_{\{u: |u| > \delta\}} h_L(u) du \right) - \Delta \int_{\{u: |u| > \delta\}} h_L(u) du \\ &= \frac{\Delta}{2} - \frac{3\Delta}{2} \int_{\{u: |u| > \delta\}} h_L(u) du \\ &= \frac{\Delta}{2} - 2\Delta \int_{\delta}^{\infty} \frac{1 - \cos Lu}{\pi L u^2} du \\ &\geq \frac{\Delta}{2} - 3\Delta \int_0^{\infty} \frac{2}{\pi L u^2} du \\ &= \frac{\Delta}{2} - \frac{6\delta}{\pi L} \frac{1}{\delta} \\ &= \frac{\Delta}{2} - \frac{6\delta}{\pi L} \frac{2\lambda}{\Delta} \\ &= \frac{\Delta}{2} - \frac{12\lambda}{\pi L} \end{aligned}$$

□

**6.9 Lemma.** Seien  $X_1, X_2$  ZVen mit  $F_1, F_2$  und mit integrierbaren charakteristischen Funktionen  $\phi_1$  und  $\phi_2$ . Dann gilt:

$$F_1(x) - F_2(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \frac{\phi_1(t) - \phi_2(t)}{it} dt$$

*Beweis.* Diese Aussage folgt aus Korollar 5.24 (Durrett, Section 2.4) □

---

<sup>2</sup>Wir betrachten nur diesen Fall

**6.10 Lemma.** Seien  $F$  und  $G$  Verteilungsfunktionen mit charakteristischen Funktionen  $\phi_F$  und  $\phi_G$ . Für jedes  $L > 0$  gilt:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - G(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L |\phi_F(t) - \phi_G(t)| \frac{1}{|t|} dt + \frac{24\lambda}{\pi L}$$

*Beweis.*  $\Delta \leq 2\Delta_L + \frac{24L}{\pi L}$

$$F_L(x) = \int F(x-u)h_L(u)du, \quad G_L(x) = \int G(x-u)h_L(u)du$$

Da die charakteristischen Funktionen der Verteilung mit Dichte  $h_L(x)$  gleich  $\left(1 - \frac{|t|}{L}\right)^t$  ist, sind die charakteristischen Funktionen von  $F_L$  und  $G_L$

$$\phi_F(t) \left(1 - \frac{|t|}{L}\right)^t \quad \text{und} \quad \phi_G(t) \left(1 - \frac{|t|}{L}\right)^t$$

Nach Lemma 6.9:

$$\begin{aligned} |F_L(x) - G_L(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| \phi_F(t) \left(1 - \frac{|t|}{L}\right)^t - \phi_G(t) \left(1 - \frac{|t|}{L}\right)^t \right| \frac{1}{|t|} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L \left| \phi_F(t) \left(1 - \frac{|t|}{L}\right)^t - \phi_G(t) \left(1 - \frac{|t|}{L}\right)^t \right| \frac{dt}{|t|} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L |\phi_F(t) - \phi_G(t)| \frac{dt}{|t|} \end{aligned}$$

□

*Beweis von Satz 6.7.*  $G(x) = \phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$

$G'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \lambda$  Wir werden annehmen, dass

$$\mathbb{E}[X_1] = 0, \quad \text{Var}[X_1] = 1$$

Wir wenden Lemma 6.10 mit

$$F(x) = P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) \quad \text{und} \quad G(x) = \phi(x)$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) - \phi(x) \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L \left| \phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \frac{dt}{|t|} + \frac{24}{\sqrt{2\pi}\pi L}$$

Aus Lemma 5.19 folgt, dass  $\left| \phi_{X_1}(t) - 1 + \frac{t^2}{2} \right| \leq \mathbb{E}[|X_1|^3] \frac{|t|^3}{6}$ .

Falls  $t^2 \leq 2$ ,  $|\phi_{X_1}(t)| \leq 1 - \frac{t^2}{2} + \mathbb{E}[|X_1|^3] \frac{t^3}{6}$ .

Wähle  $L = \frac{4\sqrt{n}}{3\mathbb{E}[|X_1|^3]}$ . Dann für  $|t| \leq L$  mit:

$$\begin{aligned} \left| \phi_{X_1} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right| &\leq 1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{\mathbb{E}[|X_1|^3] |t|^3}{6n^{\frac{3}{2}}} \leq 1 - \frac{t^2}{n2} + \frac{\mathbb{E}[|X_1|^3]}{6n^{\frac{3}{2}}} \frac{4\sqrt{n}}{3\mathbb{E}[|X_1|^3]} t^2 \\ &= 1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{4}{18} \frac{t^2}{n} = 1 - \frac{5t^2}{18n} \leq e^{-\frac{5t^2}{18n}} \end{aligned}$$

Dann:

$$\begin{aligned} \left| \phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| &= \left| \left( \phi_{X_1} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n - \left( e^{-\frac{t^2}{2n}} \right)^n \right) \right| \\ &= \left| \sum_{m=0}^{n-1} \left( \phi_{X_1}^{n-m} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) e^{-\frac{t^2}{2n}} - \phi_{X_1}^{n-m-1} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) e^{-\frac{t^2(m+1)}{2n}} \right) \right| \\ &\leq \sum_{m=0}^{n-1} \left| \phi_{X_1}^{n-m-1} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) e^{-\frac{t^2 m}{2n}} \right| \left| \phi_{X_1} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) - e^{-\frac{t^2}{2n}} \right| \\ &\leq n \left| \phi_{X_1} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) - e^{-\frac{t^2}{2n}} \right| \left( \max \left\{ \left| \phi_{X_1} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right|, e^{-\frac{t^2}{2n}} \right\} \right)^{n-1} \\ &\leq n \left| \phi_{X_1} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) - e^{-\frac{t^2}{2n}} \right| e^{-\frac{5t^2}{18n}(n-1)} \\ &\leq 3n \left| \phi_{X_1} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) - e^{-\frac{t^2}{2n}} \right| e^{-\frac{t^2}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n \left| \phi_{X_1} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) - e^{-\frac{t^2}{2n}} \right| &\leq n \left| \phi_{X_1} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) - 1 + \frac{t^2}{2n} \right| + n \left| e^{-\frac{t^2}{2n}} - 1 + \frac{t^2}{2n} \right| \\ &\leq n \mathbb{E}[|X_1|^3] \frac{|t|^3}{6n^{\frac{3}{2}}} + n \left| e^{-\frac{t^2}{2n}} - 1 + \frac{t^2}{2n} \right| \end{aligned}$$

Wegen  $|e^{-x} - 1 + x| \leq \frac{x^2}{2}$  gilt,  $n \left| e^{-\frac{t^2}{2n}} - 1 + \frac{t^2}{2n} \right| \leq \frac{t^4}{8n}$

$$\Rightarrow \left| \phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leq \left( \frac{\mathbb{E}[|X_1|^3] |t|^3}{6n^{\frac{3}{2}}} + \frac{t^4}{8n} \right) e^{-\frac{t^2}{4}}, \quad |t| \leq L \text{ und } n \geq 10$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sup_x \left| P \left( \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) - \phi(x) \right| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L e^{-\frac{t^2}{4}} \left( \frac{\mathbb{E}[|X_1|^3] t^2}{6n^{\frac{1}{2}}} + \frac{|t|^3}{8n} \right) dt + \frac{24}{\sqrt{2\pi}\pi L} \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L e^{-\frac{t^2}{4}} (\dots) dt + \frac{24}{\sqrt{2\pi}\pi L} \end{aligned}$$

□

---

<sup>3</sup>für  $n \geq 10$

### 6.3.1 Gesetz vom iterierten Logarithmuss

Sei  $\{X_i\}$  eine Folge von iid ZVen.  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ .

- Gesetz der großen Zahlen  $\mathbb{E}[X_i] = a \Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{f.s.} a$
- ZGWS beschränkt die Schwankungen von  $S_n$

$$P\left(\frac{S_n - na}{\sqrt{\sigma^2 n}} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi(x)$$

$$\Rightarrow P(|S_n - na| > x\sqrt{n}\sigma^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2(1 - \phi(x))$$

**6.11 Satz** (Gesetz vom iterierten Logarithmus). *Ist  $\mathbb{E}[X_1] = 0$  und  $\sigma^2 = \text{Var}[X_1] \in (0, \infty)$ , so gilt:*

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2\sigma^2 n \log \log n}} = 1\right) = 1 \text{ und } P\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2\sigma^2 n \log \log n}} = -1\right) = 1$$

Wir werden den Satz unter der Annahme  $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$  beweisen.

**6.12 Lemma.** *Seien  $(X_1)$  iid ZVen mit einer symmetrischen Verteilung, d.h.  $P_{X_1} = P_{-X_1}$ . Dann gilt:*

$$P\left(\max_{k \leq n} S_k \geq x\right) \leq 2P(S_n \geq x)$$

*Beweis.*  $A = \left\{\max_{k \leq n} S_k \geq x\right\}$   $B_x = \{S_i \leq x, \forall j \leq k, S_k > x\}$ ,  $B = \{S_n > x\}$

Für jedes  $k$  gilt:

$$P(B \cap B_k) \geq P(B_k \cap \{S_n \geq S_k\}) = P\left(\underbrace{B_k}_{\in \sigma(X_1, \dots, X_k)} \cap \underbrace{\{X_{k+1} + \dots + X_n \geq 0\}}_{\in \sigma(X_{k+1}, \dots, X_n)}\right)$$

$$= P(B_k) P(X_{k+1} + \dots + X_n \geq 0)$$

$$P(X_{k+1} + \dots + X_n \geq 0) = 1 - P(X_{k+1} + \dots + X_n < 0)$$

$$= 1 - P(X_{k+1} + \dots + X_n) + P(X_{k+1} + \dots + X_n = 0)$$

$$= {}^4 1 - P(X_{k+1} + X_n \geq 0) + P(X_{k+1} + \dots + X_n = 0)$$

$$\Rightarrow P(X_{k+1} + \dots + X_n \geq 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} P(X_{k+1} + \dots + X_n = 0) \geq \frac{1}{2}$$

---

<sup>4</sup>Symmetrie

$$\Rightarrow P(B \cap B_k) \geq \frac{1}{2} P(B_k)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(B) &= P\left(B \cap \left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right)\right) = \sum_{k=1}^n P(B \cap B_k) \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n P(B_k) = \frac{1}{2} P\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) = \frac{1}{2} P\left(\max_{k \leq n} S_k > x\right) \end{aligned}$$

□

**6.13 Lemma.** Sei  $Y_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  mit  $\sigma_n^2 \uparrow \infty$ . Sei  $a_n : \frac{a_n}{\sqrt{\sigma_n^2}} \rightarrow \infty$ . Dann gilt:

$$P(Y_n > a_n) \sim \frac{\sqrt{\sigma_n^2}}{\sqrt{2\pi} a_n} e^{-\frac{a_n^2}{2\sigma_n^2}} \text{ für } n \rightarrow \infty$$

*Beweis.*  $Z_n := \frac{Y_n}{\sqrt{\sigma_n^2}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$\text{Also, } P(Y_n > a_n) = P\left(Z_n > \frac{a_n}{\sigma_n}\right) = \int_{\frac{a_n}{\sigma_n}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

L'Hospital Regel:  $\int_x^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \sim \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \rightarrow \infty$

□

*Beweis Satz 11.*  $\sigma^2 = 1$   $\psi_n := \sqrt{2n \log \log n}$

Wähle  $\epsilon > 0 \Rightarrow \lambda = 1 - \epsilon$ ,  $n_k = \lambda^k$ ,  $k \geq k_0$ , wobei  $k_0 > e(\log \log k_0)$

Definiere  $A_k = \{S_n > \lambda \psi_n \text{ für ein } n \in (n_k, n_{k+1}]\}$  und

$A = \{A_k \text{ tritt unendlich oft ein}\} = \{S_n > \lambda \psi_n \text{ tritt für unendlich viele } n \text{ ein}\}$

Wenn wir zeigen, dass  $\sum_{k \geq k_0} P(A_k)$  endlich ist, dann gilt nach Borel-Cantelli-

lemma:  $P(A) = 0 \Rightarrow P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\psi_n} = \lambda\right) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\psi_n} > 1\right) &= P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \left\{\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\psi_n} > 1 + \frac{1}{j}\right\}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\psi_n} > 1 + \frac{1}{j}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_k) &\leq P(S_n \geq \lambda \psi_{n_k} \text{ für ein } n \in (n_k, n_{k+1}]) \\ &\leq P\left(\max_{n < n_{k+1}} S_n \geq \lambda \psi_{n_k}\right) \\ &\leq 2P(S_{n_{k+1}} \geq \lambda \psi_{n_k}) \end{aligned}$$

Nach Lemma 6.13:

$$\begin{aligned}
P(S_{n_{k+1}} > \lambda \psi_{n_k}) &\sim \frac{\sqrt{n_{k+1}}}{\sqrt{2\pi} \lambda \psi_{n_k}} e^{-\frac{(\lambda \psi_{n_k})^2}{2n_{k+1}}} \\
&\leq C e^{-\lambda \log \log n_k} = C (\log n_k)^{-\lambda} \\
&\leq C_1 k^{-\lambda}, \quad \lambda = 1 + \epsilon \\
\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1-\epsilon} < \infty &\Rightarrow \sum_{k \geq k_0} P(A_k) < \infty \\
P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\psi_n} \leq 1\right) &= 1
\end{aligned} \tag{6.1}$$

$\epsilon > 0, \lambda = 1 - \epsilon$ . Wenn wir zeigen, dass

$$P(S_n > \lambda \psi_k \text{ für unendlich viele } n) = 1 \tag{6.2}$$

dann bekommen wir:

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\psi_n} \geq 1\right) = P\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\psi_n} \geq 1 - \epsilon\right) = 1$$

Zuerst (1) auf Folge  $(-S_n)$  anwenden:

$$\Rightarrow P(-S_n \leq 2\psi_n \text{ für alle } n) = 1$$

$$n_k = N^k, \quad N > 1 \Rightarrow P(S_{n_{k-1}} - 2\psi_{n_{k-1}} \text{ für alle großen } k) = 1$$

$$Y_k := S_{n_k} - S_{n_{k-1}} \Rightarrow \{S_{n_{k-1}} \geq -2\psi_{n_{k-1}}\} = \{S_{n_k} \geq Y_k - 2\psi_{n_{k-1}}\} \tag{6.3}$$

Wir nehmen an, dass

$$P(Y_k > \lambda \psi_{n_k} + 2\psi_{n_{k-1}} \text{ für unendl. viele } k) \cap \{S_{n_{k-1}} \geq -2\psi_{n_{k-1}} \forall k \geq k_0\} = 1$$

$\{X_k\}$  sind unabhängig und  $Y_k \sim \mathcal{N}(0, n_k - n_{k-1})$ . Dann nach Lemma 6.13,

$$\begin{aligned}
P(Y_k > \lambda \psi_{n_k} + 2\psi_{n_{k-1}}) &\geq {}^5 P\left(Y_k > \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \psi_{n_k}\right) \\
&\sim \frac{\sqrt{n_k - n_{k-1}}}{\sqrt{2\pi} \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \psi_{n_k}} \exp\left\{-\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^2 \frac{\psi_{n_k}^2}{2(n_k - n_{k-1})}\right\} \\
&\geq \frac{c}{(\ln \ln N^k)^{\frac{1}{2}}} e^{\{-(1-\delta) \log \log N^k\}} \text{ für ein } \delta > 0 \\
&\geq \frac{\text{const}(N)}{(\log k)^{\frac{1}{2}}} k^{-1+\delta} \\
&\sum_{k \geq 2} \frac{k^{-1-\delta}}{(\log K)^{\frac{1}{2}}} = \infty
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \sum_{k \geq 2} P(Y_k \geq \lambda \psi_{n_k} + 2\psi_{n_{k-1}}) = \infty$  und  $\{Y_k > \lambda \psi_{n_k} + 2\psi_{n_{k-1}}\}$ - unabhängige Ereignisse.

$$\Rightarrow P(Y_k \geq \lambda \psi_{n_k} + 2\psi_{n_{k-1}} \text{ unendlich viele } k) = 1$$

$$\Rightarrow P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\psi_n} = 1\right) = 1$$

□

## 6.4 Poisson'sche Approximation

Seien  $(X_i)$  iid ZVen mit  $P(X_1 = 1) = p$ ,  $P(X_1 = 0) = 1 - p$ ,  $p \in (0, 1)$

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi(x)$$

$$\begin{array}{llll} X_{1,1}, & \dots, & X_{1,k_1}, & P(X_{1,k} = 1) = p_{n,k} \\ X_{2,1}, & \dots, & X_{2,k_2}, & P(X_{2,k} = 0) = 1 - p_{n,k} \\ \vdots & & \vdots & \\ X_{n,1}, & \dots, & X_{n,k_n}, & P(X_{n,k} = 0) = 1 - p_{n,n} \end{array}$$

$$X \sim \frac{\text{Poisson}(\mu)}{\mu > 0} : P(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}, k \geq 0$$

**6.14 Satz.** Für jedes  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  gilt:

$$|P(S_n \in B) - \text{Poisson}_{\mu_n}(B)| \leq \sum_{k=1}^{k_n} p_{n,k}^2$$

$$\text{Wobei } \mu_n = \sum_{k=1}^n p_{n,k}$$

**6.15 Korollar.** Falls  $\mu_n \rightarrow \mu$  und  $\max_{k \leq k_n} p_{n,k} \rightarrow 0$  so gilt  $S_n \xrightarrow{w} \text{Poisson}_\mu$

*Beweis (Coupling).* Sei  $\omega = (0, 1)^{k_n}$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$ ,  $P = \text{Lebesgue-Maß auf } \Omega$

Unser Ziel:  $(Y_{n,k})_{k=1}^n$  mit  $Y_{n,k} \sim \text{Bernoulli}(p_{n,k})$

$(Z_{n,k})_{k=1}^n$  mit  $Z_{n,k} \sim \text{Poisson}(p_{n,k})$   $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{n_k})$

$$\text{Definiere } Y_{n,k}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega_k > 1 - p_{n,k} \\ 1, & \omega_k \leq 1 - p_{n,k} \end{cases}$$

$\Rightarrow P(Y_{n,k} = 1) = P(\omega_k \leq 1 - p_{n,k}) = p_{n,k}$ . Außerdem gilt, dass  $\{Y_{n,k}\}$  unabhängig. Setze  $\pi_r = \sum_{m=0}^r \frac{(p_{n,k})^m}{m!} e^{-p_{n,k}}$ ,  $r = 0, 1, \dots$

$$\text{Definiere } Z_{n,k} = \sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\omega_k \in [\pi_{r-1}, \pi_r)\}} = \begin{cases} 0, & \omega_k < \pi_0 \\ r, & \text{falls } \omega_k \in [\pi_{r-1}, \pi_r) \end{cases}$$

$$P(Z_{n,k} = r) = P(\omega_k \in [\pi_{r-1}, \pi_r)) = \frac{(p_{n,k})^r}{r!} e^{-p_{n,k}}$$



$\Rightarrow Z_{n,k} \sim \text{Poisson}(p_{n,k})$  und  $\{Z_{n,k}\}$  sind unabhängig.

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(Y_{n,k} \neq Z_{n,k}) &= P(\omega_n \in [1 - p_{n,k}, e^{-p_{n,k}}] \text{ oder } \omega_k \in (e^{-p_{n,k}} + p_{n,k}e^{-p_{n,k}}, 1]) \\ &= (e^{-p_{n,k}} - 1 + p_{n,k}) + (1 - e^{-p_{n,k}} - p_{n,k}e^{-p_{n,k}}) \\ &= p_{n,k}(1 - e^{-p_{n,k}}) \leq^6 p_{n,k} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P\left(\sum_{n=1}^{k_n} Y_{n,k} \neq \sum_{n=1}^{k_n} Z_{n,k}\right) \leq P\left(\bigcup_{n=1}^{k_n} Z_{n,k} \neq Y_{n,k}\right) \leq \sum_{n=1}^{k_n} p_{n,k}^2$$

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{n=1}^{k_n} Y_{n,k} \in B\right) &= P\left(\sum_{n=1}^{k_n} Y_{n,k} \in B, \sum_{n=1}^{k_n} Y_{n,k} = \sum_{n=1}^{k_n} Z_{n,k}\right) \\ &\quad + P\left(\sum_{n=1}^{k_n} Y_{n,k} \in B, \sum_{n=1}^{k_n} Y_{n,k} \neq \sum_{n=1}^{k_n} Z_{n,k}\right) \\ &= P\left(\sum_{n=1}^{k_n} Z_{n,k} \in B, \sum_{n=1}^{k_n} Y_{n,k} = \sum_{n=1}^{k_n} Z_{n,k}\right) \\ &\quad + P\left(\sum_{k=1}^n Y_{n,k} \in B, \sum_{n=1}^{k_n} Y_{n,k} = \sum_{n=1}^{k_n} Z_{n,k}\right) \\ &= P\left(\sum_{k=1}^{k_n} Z_{n,k} \in B\right) - P\left(\sum_{k=1}^{k_n} Z_{n,k} \in B, \sum_{n=1}^{k_n} Y_{n,k} \neq \sum_{n=1}^{k_n} Z_{n,k}\right) \\ &\quad + P\left(\sum_{n=1}^{k_n} Y_{n,k} \in B, \sum_{n=1}^{k_n} Y_{n,k} \neq \sum_{n=1}^{k_n} Z_{n,k}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left|P\left(\sum_{n=1}^{k_n} Y_{n,k} \in B\right) - P\left(\sum_{n=1}^{k_n} Z_{n,k} \in B\right)\right| &= \\ &= \left|P\left(\sum_{n=1}^{k_n} Z_{n,k} \in B, \sum_{n=1}^{k_n} Y_{n,k} \neq \sum_{n=1}^{k_n} Z_{n,k}\right) - P\left(\sum_{n=1}^{k_n} Y_{n,k} \in B, \sum_{n=1}^{k_n} Y_{n,k} \neq \sum_{n=1}^{k_n} Z_{n,k}\right)\right| \\ &\leq P\left(\sum_{n=1}^{k_n} Y_{n,k} \neq \sum_{n=1}^{k_n} Z_{n,k}\right) \leq \sum_{n=1}^{k_n} p_{n,k}^2 \end{aligned}$$

$$\sum Z_{n,k} \sim \text{Poisson}\left(\sum p_{n,k}\right) \Leftarrow \text{Poi}(\lambda) \otimes \text{Poi}(\mu) = \text{Poi}(\mu + \lambda)$$

□

---

<sup>6</sup> $1 - e^{-x} \leq x$