

Beweis. $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{f. s.}} \mathbb{E}[X_i] \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^n X_i^+}{n} \xrightarrow{\text{f. s.}} \mathbb{E}[X_1^+]$ und $\frac{\sum_{i=1}^n X_i^-}{n} \xrightarrow{\text{f. s.}} \mathbb{E}[X_1^-]$
 \Rightarrow Wir können annehmen, dass $X_i \geq 0$. Wähle $\epsilon > 0$, setze $\alpha = 1 + \epsilon$.
 Definiere nun: $n_k = \lfloor \alpha^k \rfloor$

$$\Rightarrow \sum_{k: n_k \geq m} n_k^{-2} \leq 4 \sum_{k: n_k \geq m} \alpha^{-2k} \leq 4(1 - \alpha^{-2})^{-1} m^{-2}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} P \left(\left| \frac{S'_{n_k} - \mathbb{E}[S'_{n_k}]}{n_k} \right| > \delta \right) &\stackrel{\text{Chebyshev}}{\leq} \delta^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{Var}[S'_{n_k}]}{n_k^2} = \delta^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k^2} \sum_{m=1}^{n_k} \text{Var}[Y_m] \\ &= \delta^{-2} \sum_{m=1}^{\infty} \text{Var}[Y_m] \sum_{k: n_k \geq m} \frac{1}{n_k^2} \\ &\leq \delta^{-2} 4(1 - \alpha^{-2})^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \text{Var}[Y_m] \frac{1}{m^2} \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.18

$$\sum_{k=1}^{\infty} P \left(\left| \frac{S'_{n_k} - \mathbb{E}[S'_{n_k}]}{n_k} \right| > \delta \right) \leq 16\delta^{-2}(1 - \alpha^{-2})^{-1} \mathbb{E}[|X_1|] < \infty$$

Da δ beliebig ist, liefert uns das Borel-Cantelli Lemma die Konvergenz:

$$\frac{S'_{n_k} - \mathbb{E}[S'_{n_k}]}{n_k} \xrightarrow{\text{fast sicher}} 0$$

Ferner, aus der monotonen Konvergenz folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_j] &= \mathbb{E}[X_1 \mathbf{1}_{\{X_1 \leq j\}}] \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_1] \\ \Rightarrow \frac{\mathbb{E}[S'_{n_k}]}{n_k} &= \frac{\sum_{i=1}^{n_k} i = 1 \mathbb{E}[Y_i]}{n_k} \rightarrow \mathbb{E}[X_1] \Rightarrow \frac{S'_{n_k}}{n_k} \xrightarrow{\text{fast sicher}} \mathbb{E}[X_1] \end{aligned}$$

Aus der Definition von n_k folgt, dass $\exists n_0 : n_{k+1} \leq (1 + 2\epsilon)n_k \ \forall n \geq n_0$.

Denn für $l \in [n_k, n_{k+1}]$ gelten die Abschätzungen: $\frac{S'_l}{l} \geq \frac{S'_{n_k}}{n_{l+1}} \geq \frac{S'_{n_k}}{(1+2\epsilon)n_k}$ und

$$\frac{S'_l}{l} \leq \frac{S'_{n_{k+1}}}{n_k} \leq (1 + 2\epsilon) \frac{S'_{n_{k+1}}}{n_{k+1}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \limsup_{l \rightarrow \infty} \left| \frac{S'_l}{l} - \mathbb{E}[X_1] \right| &\leq \underbrace{\limsup_{n_k \rightarrow \infty} \left| \frac{S'_{n_k}}{n_k} - \mathbb{E}[X_1] \right|}_{=0 \text{ fast sicher}} + 2\epsilon \underbrace{\limsup_{n_k \rightarrow \infty} \frac{S'_{n_k}}{n_k}}_{=\mathbb{E}[X_1]} \end{aligned}$$

$$^1 n_k \geq \frac{\alpha^k}{2}$$

$$\Rightarrow \limsup_{l \rightarrow \infty} \left| \frac{S'_l}{l} - \mathbb{E}[X_1] \right| \leq 2\epsilon \mathbb{E}[X_1]$$

Die ϵ beliebig klein sein darf, folgt $\limsup_{l \rightarrow \infty} \left| \frac{S'_l}{l} - \mathbb{E}[X_1] \right| = 0$ □

4.19 Beispiel (Gesetz der normalen Zahlen, Borel 1908).

$$\Omega = [0, 1], \mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1]), P = \text{Lebesgue-Ma\ss auf } [0, 1]$$

$$\omega \in \Omega : \omega = 0, \xi_1(\omega) \xi_2(\omega) \dots \dots \xi_i(\omega) \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

$$E = \left\{ \frac{m}{10^n}, n \geq 1, m \in \{1, 2, \dots, 10^n\} \right\}, P(E) = 0$$

$$\nu_k^{(n)}(\omega) = |\{i \in \{1, 2, \dots, n\} : \xi_i(\omega) = k\}| \quad k = 0, 1, \dots, 9$$

Die Zahl ω hei\ss t normal, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_k^{(n)}(\omega)}{n} \rightarrow \frac{1}{10} \forall k \in \{0, 1, \dots, 9\}$

Gesetz der normalen Zahlen: $P(\{\omega : \omega \text{ normal}\}) = 1$ F\u00fcr den Beweis:

- $\{\xi_i\}_{i \leq 1}$ unabh\u00e4ngige ZVen
- $P(\xi_i = k) = \frac{1}{10}, k \in \{0, 1, \dots, 9\}$

$$\Rightarrow X_n^{(k)} = \mathbf{1}_{\{\xi_n = k\}}, n \geq 1, k \in \{0, \dots, 9\} \Rightarrow \{X_n^{(k)}\}_{n \geq 1} - \text{iid}$$

$$\Rightarrow \frac{\nu_k^{(k)}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^{(k)}}{n} \xrightarrow{\text{fast sicher}} \mathbb{E}[X_i^{(k)}] = \frac{1}{10} \quad \forall k \in \{0, \dots, 9\}$$

$$\Rightarrow \exists A_k \text{ mit } P(A_k) = 1 \text{ so dass } \frac{\nu_k^{(k)}}{n} \rightarrow \frac{1}{10} \quad \forall \omega \in A_k$$

$$\Rightarrow \frac{\nu_k^{(k)(\omega)}}{n} \rightarrow \frac{1}{10} \quad \forall k \forall \omega \in \bigcap_{j=0}^9 A_j \Rightarrow P\left(\bigcap_{j=0}^9 A_j\right) = 1.$$

Bemerkung (Beispiel). X_i iid mit $P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i}{3^i}$ hat singul\u00e4re Verteilung die mit der Cantor-Menge verbunden ist.

4.20 Satz. Seien $\{X_i\}$ unabh\u00e4ngige, identisch verteilte ZVen. Falls $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{f. s.} a \in \mathbb{R}$, dann ist X_i integrierbar und $\mathbb{E}[X_1] = a$.

$$\text{Beweis. } \frac{X_n}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n} \frac{S_{n-1}}{n-1} \xrightarrow{f. s.} 0. \Rightarrow P(|\frac{X_n}{n}| > 1 \text{ f\u00fcr } \infty \text{ viele } n) = 0.$$

$$\text{Nach Borel-Cantelli-Lemma, } \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\frac{X_n}{n}\right| \geq 1\right) = 0 < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| \geq n) < \infty \Rightarrow \mathbb{E}[|X_1|] < \infty \text{ Nach Etemadi's Gesetz: } \frac{S_n}{n} \xrightarrow{f. s.}$$

$$\mathbb{E}[X_1] \Rightarrow \mathbb{E}[X_1] = a$$

□

4.4 Zufällige Reihen

$\{X_i\}$ unabhängige ZVen, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ Nach 0-1-Gesetz:

$A = \{\omega : S_n(\omega) \text{ konvergiert}\}$ hat Wahrscheinlichkeit 0 oder 1

4.21 Satz. Seien $\{X_i\}$ unabhängig mit $\mathbb{E}[X_i] = 0$ und $\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^2] < \infty$. Dann konvergiert S_n in W'keit. $\left(P(|S_n - S| > \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, S = \sum_{i=1}^{\infty} X_i\right)$

Beweis.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(S_{n+m} - S_n)^2] &= \text{Var}[S_{n+m} - S_n] \\ &= \text{Var}\left[\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i\right] = \sum_{i=n+1}^{n+m} \text{Var}[X_i] \\ &= \sum_{i=n+1}^{n+m} \mathbb{E}[X_i^2] \end{aligned}$$

Wegen $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_i^2] < \infty$, ist Folge S_n eine Cauchy-Folge in L^2 . Und L^2 ist vollständig, d.h. $\exists S \in L^2 : S_n \rightarrow S$ in L^2 . Aber L^2 -Konvergenz impliziert Konvergenz in W'keit. \square

4.22 Satz (Levy). Sind $\{X_i\}$ unabhängig, so gilt:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} X_i \text{ konvergiert fast sicher}}_{S_n \rightarrow S \text{ fast sicher}} \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} X_i \text{ konvergiert in Wahrscheinlichkeit}}_{S_n \xrightarrow{P} S}$$

Beweis. “ \Leftarrow “ Es genügt zu zeigen, dass $P(\sup_{i \geq n} |S_i - S_n| > \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
Zuerst merken wir, dass:

$$P\left(\sup_{i \geq n} |S_i - S| > \epsilon\right) \leq P\left(\sup_{i \geq n} |S_i - S_n| > \frac{\epsilon}{2}\right) + \underbrace{P\left(|S_n - S| > \frac{\epsilon}{2}\right)}_{\rightarrow 0}$$

$P(\sup_{i \geq n} |S_i - S_n| > 2\delta) = \sum_{i=n}^{\infty} P(B_i)$, wobei

$$B_i = \{|S_j - S_n| \leq 2\delta \forall j \in [n, i-1], |S_i - S_n| > 2\delta\}$$

Auf B_i gilt: $|S_i - S_n| > 2\delta$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |S - S_n| &= |(S - S_i) - (S_n - S_i)| \geq |S_n - S_i| - |S - S_i| \\ &> 2\delta - |S - S_i| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B_i \cap \underbrace{\{|S - S_i| \leq \delta\}}_{\in \sigma X_{i+1}, X_{i+2}, \dots} \subseteq B_i \cap \{|S - S_n| > \delta\}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow P(B_i) P(|S - S_i| < \delta) \leq P(B_i \cap \{|S - S_n| > \delta\}) \\
&\Rightarrow P(B_i) \leq \frac{P(B_i \cap \{|S - S_n| > \delta\})}{P(|S - S_i| \leq \delta)} \\
&\Rightarrow P\left(\sup_{i \geq n} |S_i - S_n| > 2\delta\right) = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{P(B_i \cap \{|S - S_n| > \delta\})}{P(|S - S_n| \leq \delta)} \\
&\leq \frac{1}{\inf_{i \geq n} P(|S - S_i| \leq \delta)} \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} P(B_i \cap \{|S - S_n| > \delta\})}_{P\left(\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} B_i\right) \cap \{|S - S_n| > \delta\}\right)} \\
&\quad \underbrace{\leq P(|S - S_n| > \delta)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \\
&\Rightarrow P\left(\sup_{i \geq n} |S_i - S_n| > 2\delta\right) \leq \frac{\overbrace{P(|S_n - S| > \delta)}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{1 - \sup_{i \geq n} P(|S_i - S|) > \delta}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

□

4.23 Satz. Seien $\{X_i\}$ unabhängige ZVen, $X_i^{(c)} = X_i \mathbb{1}_{\{|X_i| \leq c\}}$. Konvergieren die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| < c) < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[|X_n^{(c)}| \right] < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var} \left[X_n^{(c)} \right] < \infty$ so konvergiert $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ fast sicher.

Beweis. $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > c)$ und Borel-Cantelli-Lemma gibt

$$P(|X_n| > c \text{ für unendlich viele } n \geq 1) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} X_i^{(c)} \text{ konvergiert} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} X_i$$

konvergiert. Also bleibt zu zeigen: $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var} \left[X_n^{(c)} \right] < \infty$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(X_n^{(c)} - \mathbb{E} \left[X_n^{(c)} \right] \right) \text{ konvergiert in W'keit (Satz 4.21).}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(X_n^{(c)} - \mathbb{E} \left[X_n^{(c)} \right] \right) \text{ konvergiert fast sicher. } \sum \mathbb{E} \left[X_n^{(c)} \right] \text{ konvergiert}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} X_n^{(c)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(X_n^{(c)} - \mathbb{E} \left[X_n^{(c)} \right] \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[X_n^{(c)} \right] \text{ konvergiert auch f. ü. } \quad \square$$

4.24 Bemerkung. Konvergiert $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ fast sicher so konvergieren

$$\sum P(|X_n| > c), \sum \mathbb{E} \left[X_n^{(c)} \right], \sum \text{Var} \left[X_n^{(c)} \right] \text{ für alle } c > 0.$$

4.25 Beispiel. $\{X_i\}$ iid mit $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$

Frage: Konv. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i}{i^\alpha}$?, $\mathbb{E}\left[\frac{X_i}{i^\alpha}\right] = 0$, $\text{Var}\left[\frac{X_i}{i^\alpha}\right] = \frac{1}{i^{2\alpha}} \text{Var}[X_i] = \frac{\mathbb{E}[X_i^2]}{i^{2\alpha}} = \frac{1}{i^{2\alpha}}$

\Rightarrow Für $\alpha > \frac{1}{2}$ konvergiert die Reihe $\sum \text{Var}\left[\frac{X_i}{i^\alpha}\right]$

$$\forall c > 1 \left(\frac{X_i}{i^\alpha}\right)^{(c)} = \frac{X_i}{i^\alpha} \xrightarrow{4.23} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i}{i^\alpha} \text{ konvergiert fast sicher } \forall \alpha > \frac{1}{2}$$

Angenommen $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i}{i^\alpha}$ konvergiert für ein $\alpha \leq \frac{1}{2}$, denn

$$\infty > \sum_{i=1}^{\infty} \text{Var}\left[\left(\frac{X_i}{i^\alpha}\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \text{Var}\left[\frac{X_i}{i^\alpha}\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{2\alpha}} = \infty$$

Falls $X_i = 1$, dann $\sum \frac{X_i}{i^\alpha}$ konvergiert $\Leftrightarrow \alpha > 1$. Falls $X_i = (-1)$, dann konvergiert $\sum \frac{X_i}{i^\alpha} \forall \alpha > 0$ weil $\frac{1}{i^\alpha} - \frac{1}{(i+1)^\alpha} \sim \frac{1}{i^{\alpha+1}}$

4.26 Satz. Seien $\{X_i\}$ unabhängig, identisch verteilt mit $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Dann gilt:

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{n}(\log n)^{\frac{1}{2}+\delta}} \xrightarrow{f.s.} 0 \quad \forall \delta > 0$$

Gesetz der großen Zahlen: $\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} \xrightarrow{f.s.} 0$. Informell:

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{n}(\log n)^{\frac{1}{2}+\delta}} \sim \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} = o\left(\frac{(\log n)^{\frac{1}{2}+\delta}}{\sqrt{n}}\right)$$

Beweis. $a_n = \sqrt{n}(\ln n)^{\frac{1}{2}+\delta}$, $n \geq 2, a_1 = 1$. Wir dürfen annehmen, dass $\mathbb{E}[X_1] = 0$. Es gilt:

- $\mathbb{E}\left[\frac{X_n}{a_n}\right] = 0 \quad \forall n \geq 1$
-

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_n}{a_n}\right)^2\right] &= \mathbb{E}[X_1^2] + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1+2\delta}} \mathbb{E}[X_i^2] \\ &= \mathbb{E}[X_1^2] \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1+2\delta}}\right) < \infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{a_n}$ konvergiert fast sicher. Die Behauptung des Satzes folgt aus dem

□

4.27 Lemma (Kroneckerlemma). *Seien $a_n, x_n \in \mathbb{R}$. Falls $a_n \uparrow \infty$ und $\sum \frac{x_n}{a_n}$ konvergiert, so gilt $\frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^n x_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$*

Kapitel 5

Schwache Konvergenz

5.1 Definition und Eigenschaften

5.1 Definition. Seien $\{P_n\}, P$ W'Maße auf (Ω, \mathcal{A}) . P_n konvergiert gegen P schwach ($P_n \Rightarrow P, P_n \xrightarrow{w} P$), falls

$$\int_{\mathbb{R}} f dP_n \rightarrow \int f dP \quad \forall f \in C_b(\mathbb{R})$$

Definition (Vereinbarung). Wir werden sagen, dass $\{X_n\}$ konvergiert schwach gegen ZV X , falls $P_{x_n} \Rightarrow P_x$. Dabei werden wir schreiben

$$X_n \Rightarrow X \quad \left(X_n \xrightarrow{w} X \right)$$

5.2 Satz (Portmanteu). Seien $\{P_i\}, P$ W'Maße auf (Ω, \mathcal{A}) . Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $P_n \Rightarrow P$

(ii) $\int f dP_n \rightarrow \int f dP \quad \forall f : \text{beschränkt und } \underline{\text{gleichmäßig stetig}}$

(iii) $\limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(F) \leq P(F) \quad \forall F \text{ abgeschlossen}$

(iv) $\liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(G) \geq P(G) \quad \forall G \text{ offen}$

(v) $P_n(A) \rightarrow P(A) \quad \forall A : P(\delta A) = 0$

Beweis. (iii) \Leftrightarrow (iv) F ist abgeschlossen $\Leftrightarrow F^c$ ist offen $P_n(F) = 1 - P_n(F^c)$, $P(F) = 1 - P(F^c)$. Dann gilt:

$$\limsup P_n(F) \leq P(F) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - P_n(F^c)) \leq 1 - P(F^c)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \liminf_{n \rightarrow \infty} P(F^c) \leq 1 - P(F^c) \Leftrightarrow P(F^c) \leq \liminf P(F^c)$$

(ii) \rightarrow (iii) Sei F eine abgeschlossene Menge. Lege ein $\delta > 0$ fest, und für jedes $\epsilon > 0$ definiere

$$G_\epsilon = \{x \in \mathbb{R} : \text{dist}(x, F) < \epsilon\}$$

Aus der Stetigkeit von oben von P folgt $P(G_\epsilon) \leq P(F) + \delta \forall \epsilon$ klein

$$\text{genug. Setze } \phi(t) = \begin{cases} 1, & t < 0 \\ 1 - t, & t \in [0, 1] \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$$

$$f_\epsilon(x) = \phi\left(\frac{1}{\epsilon} \text{dist}(x, F)\right) \text{ Eigenschaften von } f_\epsilon :$$

- f_ϵ ist gleichmäßig stetig und beschränkt.
- $f(x) = 1 \forall x \in F$
- $f(x) = 0 \forall x \in G_\epsilon^c$
- $f(x)_\epsilon \in [0, 1] \forall x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_n(F) &= \int_F f_\epsilon dP_n \leq \int_{\mathbb{R}} f_\epsilon dP_n \xrightarrow{(ii)} \int_{\mathbb{R}} f_\epsilon dP = \int_{G_\epsilon} f_\epsilon dP \leq P(G_\epsilon) \\ \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(F) &\leq P(G_\epsilon) < P(F) + \delta \end{aligned}$$

(iii) \rightarrow (i) $f \in C_b(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists a = a(f)$ und $b(f): a \cdot f(x) + b \in [0, 1] \Rightarrow$.

Zuerst betrachten wir $f \in C_b(\mathbb{R})$ mit $f(x) \in [0, 1]$

$\forall k \in \mathbb{N}$ definiere die Mengen $F_i = \{x : f(x) \geq \frac{i}{k}\}, i = 0, \dots, k$. Jedes F_i ist abgeschlossen, $F_0 = \mathbb{R}, F_k = \emptyset$

$$\begin{aligned} l.s. &= \sum_{i=1}^k \left(\frac{i-1}{k}\right) P\left(\left\{x : f(x) \in \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right]\right\}\right) \\ &\leq \int f dP \leq \sum_{i=1}^k \frac{i}{k} P\left(\left\{x : f(x) \in \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right]\right\}\right) = r.s. \\ l.s. &= \sum_{i=1}^k \frac{i-1}{k} P(F_{i-1} \setminus F_i) = \sum_{i=1}^k \frac{i-1}{k} (P(F_{i-1}) - P(F_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{k} P(F_i) - \sum_{i=1}^k \frac{i-1}{k} P(F_i) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k P(F_i) \\ r.s. &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{i+1}{k} P(F_i) - \sum_{i=1}^k \frac{i}{k} P(F_i) = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k P(F_i) \\ &\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k P(F_i) \leq \int f dP \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k P(F_i) \\ &\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k P_n(F_i) \leq \int f dP_n \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k P_n(F_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f dP_n &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k P_n(F_i) \right) \\
&\leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(F_i) \\
&\leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k P(F_i) \leq \frac{1}{k} + \int f dP
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \int f dP_n \leq \int f dP(*) \Rightarrow (*) \text{ ist für alle } f \in C_b(\mathbb{R}) \text{ erfüllt.}$$

$$(*) \text{ zu } (-f) : \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f dP_n \geq \int f dP$$

(iii) \rightarrow (v) Sei A° das Innere und \bar{A} der Abschluss von A .

$$\begin{aligned}
P(\bar{A}) &\stackrel{(iii)}{\geq} \limsup_{n \rightarrow \infty} P((\bar{A})_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(A) \\
&\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(A) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(A^\circ) \stackrel{(iv)}{\geq} P(A^\circ)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Aber für } A: P(\bar{A}) = 0 &\Rightarrow P(\bar{A}) = P(A) = P(A^\circ) \Rightarrow P(A) \geq \\
\limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(A) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(A) \geq P(A)
\end{aligned}$$

(v) \rightarrow (iii) Sei F eine abgeschlossene Menge. $\forall \delta > 0$ gilt:

$$\partial\{x : \text{dist}(x, F) < \delta\} \subseteq \{x : \text{dist}(x, F) = \delta\}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow R_\delta = \partial\{x : \text{dist}(x, F) \leq \delta\} \text{ sind paarweise disjunkt. } P \text{ ist W'Maß} \\
&\Rightarrow \exists \text{ nur abzählbar viele } \delta' \text{ s mit } P(R_{\delta'}) > 0 \Rightarrow \exists \delta_k \downarrow 0 : P(R_{\delta_k}) = 0
\end{aligned}$$

$$\text{Für jedes } k \geq 1 \text{ gilt: } \limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(F) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(F_k) \stackrel{(v)}{=} P(F_k) \text{ wobei}$$

$$F_k = \{x : \text{dist}(x, F) \leq \delta_k\} \supseteq F.$$

$$F \text{ ist abgeschlossen} \Rightarrow F_k \downarrow F \Rightarrow P(F_k) \downarrow P(F)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(F) \leq P(F_k) \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(F) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} P(F_k) = P(F)$$

□