

### 8.3 Optimal Stopping

Ist  $(M_n)$  ein Submartingal, so gilt:

- 1)  $\mathbb{E}[M_k] \leq \mathbb{E}[M_n] \quad \forall k \leq n$
- 2)  $\mathbb{E}[M_T] \leq \mathbb{E}[M_n]$  falls  $P(T \leq n) = 1$

**8.29 Satz.** Sei  $\Gamma$  eine Stoppzeit

- a)  $(M_n)$  ein gleichmäßiges int-bares Submartingal  
oder
- b)  $\mathbb{E}[|M_T|] < \infty$  und  $(M_n \mathbf{1}_{T \leq n})_{n \geq 0}$  ist gleichmäßig intbar. Dann ist  $(M_{T \wedge n})_{n \geq 0}$  auch gleichmäßig integrierbar.

*Beweis.* a)  $\chi^+$  ist konvex und monoton wachsend  $\Rightarrow (M_n^+)$  ist ein Submartingal Aus (2)  $\Rightarrow \mathbb{E}[M_{T \wedge n}^+] \leq \mathbb{E}[M_n^+] \quad \forall n \geq 0$  Da  $(M_n)$  gleichmäßig integrierbar ist, ist auch  $(M_n^+)$  gleichmäßig integrierbar  $\Rightarrow \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[M_n^+] < \infty \Rightarrow \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[M_{T \wedge n}^+] \leq \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[M_n^+] < \infty$  Nach Martingalkonvergenzsatz konvergiert  $M_{T \wedge n}$  für  $n \rightarrow \infty$ :

$$M_{T \wedge n} \rightarrow M_T \text{ fast sicher \& } \mathbb{E}[|M_T|] < \infty$$

Für jedes  $k > 0$  gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|M_{T \wedge n}| \mathbf{1}_{\{|M_{T \wedge n}| > k\}}] &= \mathbb{E}[|M_{T \wedge n}| \mathbf{1}_{\{|M_{T \wedge n}| > k\}} \mathbf{1}_{\{T \leq n\}}] \\ &\quad + \mathbb{E}[|M_{T \wedge n}| \mathbf{1}_{\{|M_{T \wedge n}| > k\}} \mathbf{1}_{\{T > n\}}] \quad (*) \\ &\leq \mathbb{E}[|M_T| \mathbf{1}_{\{|M_T| > k\}}] + \mathbb{E}[|M_n| \mathbf{1}_{\{|M_n| > k\}}] \\ \Rightarrow \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[|M_{T \wedge n}| \mathbf{1}_{\{|M_{T \wedge n}| > k\}}] &\leq \underbrace{\mathbb{E}[|M_T| \mathbf{1}_{\{|M_T| > k\}}]}_{\rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty, \text{ weil } \mathbb{E}[|M_T|] < \infty} \\ &\quad + \underbrace{\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[|M_n| \mathbf{1}_{\{|M_n| > k\}}]}_{\rightarrow 0 \text{ weil } (M_n) \text{ gleichm. integrierbar}} \end{aligned}$$

b) Aus (\*) folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|M_{T \wedge n}| \mathbf{1}_{\{|M_{T \wedge n}| > k\}}] &\leq \mathbb{E}[|M_T| \mathbf{1}_{\{|M_T| > k\}}] \\ &\quad + \mathbb{E}[|M_n| \mathbf{1}_{\{|M_n| > k\}} \mathbf{1}_{\{|M_n| \mathbf{1}_{\{T > n\}} > k\}}] \\ \Rightarrow \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[|M_{T \wedge n}| \mathbf{1}_{\{|M_{T \wedge n}| > k\}}] &\leq \underbrace{\mathbb{E}[|M_n| \mathbf{1}_{\{|M_T| > k\}}]}_{\rightarrow 0} \\ &\quad + \underbrace{\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[|M_n| \mathbf{1}_{\{T > n\}} \mathbf{1}_{\{|M_n| \mathbf{1}_{\{T > n\}} > k\}}]}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

□

**8.30 Satz.** Sei  $(M_n)$  ein gleichmäßig integrierbares Submartingal. Für jede Stoppzeit  $T$  gilt:

$$\mathbb{E}[M_0] \leq \mathbb{E}[M_T] \leq \mathbb{E}[M_\infty]$$

*Beweis.* Nach Satz 8.23 gilt:

$$\mathbb{E}[M_0] \leq \mathbb{E}[M_{T \wedge n}] \leq \mathbb{E}[M_n] \quad \forall n \geq 0$$

Nach Satz 8.35 ist  $(M_{T \wedge n})$  ein gleichmäßig integrierbares Submartingal. Nach Satz 8.31:

$$\begin{aligned} M_n &\xrightarrow[L_\perp]{\text{fast sicher}} M_\infty \quad \& \quad M_{T \wedge n} \xrightarrow[L_\perp]{\text{fast sicher}} M_T \\ \Rightarrow \mathbb{E}[M_n] &\rightarrow \mathbb{E}[M_\infty] \quad \& \quad \mathbb{E}[M_{T \wedge n}] \rightarrow \mathbb{E}[M_T] \\ \mathbb{E}[M_0] &\leq \mathbb{E}[M_{T \wedge n}] \leq \mathbb{E}[M_n] \quad \forall n \geq 0 \\ \Rightarrow \downarrow & \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbb{E}[M_0] &\leq \mathbb{E}[M_T] \leq \mathbb{E}[M_\infty] \end{aligned}$$

□

**8.31 Satz** (Optimal Stopping). Seien  $S \leq T$  Stoppzeiten und sei  $(M_{T \wedge n})$  ein gleichmäßig integrierbares Submartingal. Dann gilt:

a)  $\mathbb{E}[M_S] \leq \mathbb{E}[M_T]$

b)  $M_S \leq \mathbb{E}[M_T | \mathcal{F}_S]$ , wobei  $\mathcal{F}_S = \{A : A \cap \{S = n\} \in \mathcal{F}_n \forall n\}$

8.32 Bemerkung.  $\mathcal{F}_S$  ist eine  $\sigma$ -Algebra

*Beweis.* Wir wenden Satz 8.36 mit  $\tilde{M}_n = M_{T \wedge n}$  und  $\tilde{T} = S$ :

$$\mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[\tilde{M}_0] \leq \underbrace{\mathbb{E}[\tilde{M}_{\tilde{T}}]}_{\mathbb{E}[M_{T \wedge S}] = \mathbb{E}[M_S]} \leq \mathbb{E}[\tilde{M}_\infty] = \mathbb{E}[M_T]$$

$\Rightarrow$  (a) ist bewiesen. Sei  $A \in \mathcal{F}_S$ .

$$\text{Definiere } U(\omega) = \begin{cases} S(\omega), & \text{falls, } \omega \in A \\ T(\omega), & \text{falls, } \omega \in A^c \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \{U = n\} &= (\{U = n\} \cap A) \cup (\{U = n\} \cap A^c) \\ &= \underbrace{\left( \underbrace{\{S = n\} \cap A}_{\in \mathcal{F}_n} \right)}_{\in \mathcal{F}_n} \cup \underbrace{\left( \underbrace{\{T = n\} \cap A^c}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{S \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \right)}_{\in \mathcal{F}_n} \end{aligned}$$

Ausserdem gilt:  $U = T$ . Dann folgt aus a):  $\mathbb{E}[M_S \mathbf{1}_A] + \mathbb{E}[M_T \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[M \cup \mathbf{1}_A] + \mathbb{E}[M \cup \mathbf{1}_{A^c}] \leq \mathbb{E}[M_T] \mathbb{E}[M_T \mathbf{1}_A] + \mathbb{E}[M_T \mathbf{1}_{A^c}] \Rightarrow \mathbb{E}[M_S \mathbf{1}_A] \leq \mathbb{E}[M_T \mathbf{1}_A] =$

$\mathbb{E}[\mathbb{E}[M_T \mathbb{1}_A | \mathcal{F}_S]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_T | \mathcal{F}_S] \mathbb{1}_A] \forall A \in \mathcal{F}_S \Rightarrow {}^1M_S \leq \mathbb{E}[M_T | \mathcal{F}_S]$  Dann  
 $\epsilon P(A_\epsilon) = \int_{A_\epsilon} (M_S - \mathbb{E}[M_T | \mathcal{F}_S]) dP \leq 0 \Rightarrow P(A_\epsilon) = 0 \forall \epsilon > 0 \Rightarrow M_S \leq \mathbb{E}[M_T | \mathcal{F}_S]$  fast sicher  $\square$

*8.33 Beispiel.* Die Irrfahrt auf  $\mathbb{Z}$ . Sei  $p \in (0, 1)$  und  $X_i$  iid ZVen. mit  
 $P(X_1 = 1) = p, P(X_1 = -1) = 1 - p, S_n = \sum_{k=1}^n X_k. (S_n, n \geq 0)$  einfache  
 Irrfahrt auf  $\mathbb{Z}$

Mit Startpunkt x:  $S_n = x + \sum_{i=1}^n X_i, n \geq 0$

**8.34 Lemma.**  $M_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}$  ist ein Martingal

*Beweis.*  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n), n \geq 0$

$$\text{M1)} \quad M_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{x + \sum_{i=1}^n X_i}$$

M2)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|M_n|] &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{x + \sum_{i=1}^n X_i}\right] \\ &= \left(\frac{1-p}{p}\right)^x \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n \left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_i}\right] = \left(\frac{1-p}{p}\right)^x \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_i}\right] \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_i}\right] = \left(\frac{1-p}{p}\right)^1 p + \left(\frac{1-p}{p}\right)^{-1} (1-p) = 1$$

M3)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}\left[M_n \left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_{n+1}} | \mathcal{F}_n\right] \\ &= M_n \mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_{n+1}} | \mathcal{F}_n\right] = M_n \mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_{n+1}}\right] = M_n \end{aligned}$$

Seien  $a < x < b \in \mathbb{Z}$   $\tau_a := \min\{k \geq 1 : x + S_k < a\}$   $\tau_b := \min\{k \geq 1 : x + S_k > b\}$   $T = \tau_a \wedge \tau_b = \min\{k \geq 1 : x + S_k \notin [a, b]\}$

$\square$

**8.35 Satz.**  $p \neq \frac{1}{2}, a < x < b \in \mathbb{Z}$ . Dann gilt:

$$P(\tau_a \leq \tau_b) = \frac{Q^x - Q^b}{Q^a - Q^b}, \quad Q = \frac{1-p}{p}$$

---

${}^1A_\epsilon = \{M_S - \mathbb{E}[M_T | \mathcal{F}_S] \geq \epsilon\} \in \mathcal{F}_S$

*Beweis.*  $P(T < \infty) = 1$  Gesetz der großen Zahlen  $x \in [a, b] \Rightarrow |S_{T \wedge n}| \leq \max\{|a|, |b|\} \Rightarrow (M_{T \wedge n})_{n \geq 0} = (Q^{S_{T \wedge n}})_{n \geq 0}$  sind beschränkt.  $\Rightarrow (M_{T \wedge n})_{n \geq 0}$  ist gleichmäßig integrierbar.  $\Rightarrow$  Aus dem Satz 8.36 folgt, dass:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-p}{p}\right)^x &= \mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_T] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{x+\sum_{i=1}^T X_i} \mathbb{1}_{\{\tau_a < \tau_b\}}\right] + \mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{x+\sum_{i=1}^T X_i} \mathbb{1}_{\{\tau_a > \tau_b\}}\right] \\ &= \left(\frac{1-p}{p}\right)^a P(\tau_a < \tau_b) + \left(\frac{1-p}{p}\right)^b P(\tau_a > \tau_b) \end{aligned}$$

$$Q^x = Q^a P(\tau_a < \tau_b) + Q^b (1 - P(\tau_a < \tau_b)) \quad Q^x - Q^b = (Q^a - Q^b) P(\tau_a < \tau_b) \quad \square$$

**8.36 Satz.** Für die symmetrische ( $p = \frac{1}{2}$ ) Irrfahrt und  $a < x_0 < b$  gilt:

$$1) \quad P(\tau_a < \tau_b) = \frac{b}{b-a}$$

$$2) \quad \mathbb{E}[T] = -ab_0$$

*Beweis.*  $S_n$  ist ein Martingal

$$1) \quad \text{Wegen } S_0 = 0 \in [a, b] \text{ gilt: } a \leq S_{T \wedge n} \leq b \Rightarrow (S_{T \wedge n})_{n \geq 0} \text{ gleichmäßig integrierbares Martingal} \Rightarrow 0 = \mathbb{E}[S_0] = \mathbb{E}[S_T] = \underbrace{aP(\tau_a < \tau_b) + bP(\tau_a > \tau_b)}_{1 - P(\tau_a < \tau_b)}$$

$$2) \quad (S_n^2 - n)_{n \geq 0} \text{ ein Martingal. Sei } N \in \mathbb{N} \text{ fest, definiere } \tilde{T} = T \wedge N$$

$$\left| S_{\tilde{T} \wedge n}^2 - \tilde{T} \wedge n \right| \leq \max\{|S_{\tilde{T} \wedge n}^2|, \tilde{T} \wedge n\} \leq \max\{a^2, b^2, N\}$$

$\Rightarrow (S_{\tilde{T} \wedge n}^2 - \tilde{T})_{n \geq 0}$  ein gleichmäßig integrierbares Martingal. Aus dem Optional Stopping Satz:

$$0 = \mathbb{E}[S_{\tilde{T}}^2 - \tilde{T}] = \underbrace{\mathbb{E}[S_{T \wedge n}^2]}_{\text{beschr. Konvergenz} \rightarrow \mathbb{E}[1]S_T^2} - \underbrace{\mathbb{E}[T \wedge n]}_{\text{monotone Konvergenz} \rightarrow \mathbb{E}[T]}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[S_T^2] \\ &\mathbb{E}[S_T^2] = a^2 P(\tau_a < \tau_b) + b^2 P(\tau_a > \tau_b) \end{aligned} \quad \text{Hier fehlt eine Zeile}$$

□

## 8.4 Verzweigungsprozesse

Sorry fehlt, da hat ich keinen Nerv.