

Kapitel 1

Maßtheoret. Grundlagen der W'Theorie

1.1 Mengensysteme

Notation. $\Omega \neq \emptyset$ und $2^\Omega = \mathcal{P}(\Omega)$; $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$ heißt Mengensystem

1.1 Definition. Ein Mengensystem \mathcal{A} heißt Algebra falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$
3. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

1.2 Definition. Ein Mengensystem \mathcal{A} heißt σ -Algebra, falls 1) und 3) erfüllt sind und zusätzlich 2') $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

1.3 Satz. Ein Mengensystem \mathcal{A} ist genau dann eine σ -Algebra wenn es folgende Eigenschaften hat:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$
3. $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Beweis. \Rightarrow (a) klar

(b) $A \setminus B = A \cap B^c$ also klar da $B \in \mathcal{A} \Rightarrow B^c \in \mathcal{A} \xrightarrow{A \in \mathcal{A}} A \cap B^c \in \mathcal{A}$

(c) $A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow A_n^c \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap A_n^c \in \mathcal{A} \Rightarrow (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

\Leftarrow (a) klar

(b) $A \in \mathcal{A} \xrightarrow{\Omega \in \mathcal{A}} \Omega \setminus A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

(c) analog wie oben

□

1.4 Definition. Falls \mathcal{F} eine σ -Algebra ist, so heißt (Ω, \mathcal{F}) Messraum

1.5 Beispiel. • $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ ist σ -Algebra

• $\mathcal{A} = 2^\Omega$ ist σ -Algebra

• $\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i]; a_1 \leq b_1 < a_2 \leq \dots < a_n \leq b_n \right\}$ ist Algebra, aber keine σ -Algebra

1.6 Satz. Ist $T \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge und \mathcal{A}_t eine σ -Algebra $\forall t \in T$, so ist $\mathcal{A}_T := \bigcap_{i \in T} \mathcal{A}_t$ und $\bigcap_{i \in T} \{A \subseteq \Omega : A \in \mathcal{A}_t \forall t \in T\}$ eine σ -Algebra

Beweis. 1. \mathcal{A}_t ist eine σ -Algebra $\forall t \in T \Rightarrow \Omega \in \mathcal{A}_t; \forall t \in T \Rightarrow \Omega \in \mathcal{A}_T$

2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A \in \mathcal{A}_t; \forall t \in T \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_t \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_T$

3.

$$\begin{aligned} \{A_n\} \subseteq \mathcal{A}_T &\Rightarrow \{A_n\} \subseteq \mathcal{A}_t; \forall t \in T \\ &\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_t; \forall t \in T \\ &\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_T \end{aligned}$$

□

1.7 Satz. Sei \mathcal{A} ein Mengensystem, dann existiert die kleinste σ -Algebra $\sigma(\mathcal{A})$ mit $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{A}) : \sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{\mathcal{F}: \mathcal{F} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra und } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}} \mathcal{F}$

Beweis. 2^Ω ist eine σ -Algebra und $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega \Rightarrow \{\mathcal{F} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}\}$ ist nicht leer
 $\xrightarrow{\text{Satz 1.6}} \bigcap_{\{\mathcal{F}: \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}\}} \mathcal{F}$ auch eine σ -Algebra und $\mathcal{A} \subseteq \bigcap \mathcal{F}$. $\sigma(\mathcal{A})$ heißt die von \mathcal{A}

erzeugte σ -Algebra und \mathcal{A} heißt Erzeuger von $\sigma(\mathcal{A})$

□

1.8 Bemerkung. a) $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \Rightarrow \sigma(\mathcal{A}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_2)$

b) \mathcal{A} ist genau dann eine σ -Algebra wenn $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A})$

1.9 Definition. Sei $E \subset \mathbb{R}^m$. Die von offenen Teilmengen erzeugte σ -Algebra (E) heißt Borel'sche σ -Algebra. Die Elemente von $\mathcal{B}(E)$ nennen wir borelsche Mengen. Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$; $a \leq b$; $a_1 < b_1, a_2 < b_2, \dots, a_m \leq b_m$. Definiere offene Quader (a, b) : $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_m, b_m)$. Genauso definiert man $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$, $[a, \infty)$ und (a, ∞) .

$$\epsilon_1 = \{A \subset \mathbb{R}^m : A \text{ offen}\}$$

$$\epsilon_2 = \{A \subset \mathbb{R}^m : A \text{ abgeschlossen}\}$$

$$\epsilon_3 = \{A \subset \mathbb{R}^m : A \text{ kompakt}\}$$

$$\epsilon_4 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}^m \text{ und } a < b\}$$

$$\epsilon_5 = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{Q}^m \text{ und } a < b\}$$

$$\epsilon_6 = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{Q}^m \text{ und } a < b\}$$

$$\epsilon_7 = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{Q}^m \text{ und } a < b\}$$

$$\epsilon_8 = \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{Q}^m\}$$

$$\epsilon_9 = \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{Q}^m\}$$

$$\epsilon_{10} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{Q}^m\}$$

$$\epsilon_{11} = \{[a, \infty) : a \in \mathbb{Q}^m\}$$

$$\epsilon_{12} = \{B_r(x) : x \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}\}$$

1.10 Satz. Die Borelsche σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ wird von jedem der Mengensysteme $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{12}$ erzeugt.

Beweis. ϵ_1) Ist Erzeuger per Definition

$$\begin{aligned} \epsilon_2) \quad & \bullet A \in \epsilon_1 \Rightarrow A^c \in \epsilon_2 \Rightarrow (A^c)^c \in \epsilon_2 \Rightarrow \epsilon_1 \subset \sigma(\epsilon_2) \xrightarrow{1.9} \sigma(\epsilon_1) \subseteq \sigma(\sigma(\epsilon_2)) = \sigma(\epsilon_2) \\ & \bullet A \in \epsilon_2 \Rightarrow A^c \in \epsilon_1 \Rightarrow \epsilon_2 \subset \sigma(\epsilon_1) \Rightarrow \sigma(\epsilon_2) \in \sigma(\epsilon_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_4) \quad & \epsilon_4 \subset \epsilon_1 \Rightarrow \sigma(\epsilon_4) \subset \sigma(\epsilon_1) \\ & A \subset \mathbb{R}^m \text{ offen: } \forall x \in A \exists (a(x), b(x)) \text{ mit } a(x), b(x) \in \mathbb{Q}^m \text{ und} \\ & (a(x), b(x)) \in A \Rightarrow A = \bigcup_{x \in A \cap \mathbb{Q}^m} (a(x), b(x)) \Rightarrow A \in \sigma(\epsilon_4) \\ & \Rightarrow \epsilon_1 \subset \sigma(\epsilon_4) \Rightarrow \sigma(\epsilon_1) \subset \sigma(\sigma(\epsilon_4)) \Rightarrow \sigma(\epsilon_1) \subset \sigma(\epsilon_4) \\ & \Rightarrow \sigma(\epsilon_1) = \sigma(\epsilon_4) \end{aligned}$$

1.2 Zufallsvariablen

1.11 Definition. Seien $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ zwei Messräume. $X : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ heißt messbar (oder ZV mit Werten in $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$), falls

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega_1 : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}_1 \forall A \in \mathcal{F}_2$$

1.12 Bemerkung. 1. Ist $\mathcal{F}_1 = 2^{\Omega_1}$ so ist jede Zufallsvariable X messbar; das gleiche gilt für $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega_2\}$

2. Ist $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega_1\}$ und $\mathcal{F}_2 \neq \{\emptyset, \Omega_2\}$ so ist $X : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ messbar $\Leftrightarrow X(\omega) = X(\omega') \forall \omega, \omega' \in \Omega_1$

1.13 Satz. $X : (\Omega_1, \mathcal{F}_1) \rightarrow (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$. Das Urbild

$$X^{-1}(\mathcal{F}_2) := \{X^{-1}(A), A \in \mathcal{F}_2\}$$

ist die kleinste σ -Algebra, bezüglich der X meßbar ist. (Wir werden $\sigma(X) := X^{-1}(\mathcal{F}_2)$ die von X erzeugte σ -Algebra nennen)

1.14 Definition. Sei $I \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge und $\forall i \in I$ sei $X_i : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega_i, \mathcal{F}_i)$. Dann heißt $\sigma(X_i, i \in I) := \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \sigma(X_i)\right)$ die von $\{X_i, i \in I\}$ erzeugte σ -Algebra

1.15 Satz. Seien $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ Messräume und sei $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega_2}$ mit $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}_2$. Dann ist $X : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ messbar $\Leftrightarrow X^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1 \forall A \in \mathcal{A}$

Beweis. \Rightarrow offensichtlich.

$$\Leftarrow \mathcal{F} = \{A \in 2^{\Omega} : X^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1\}$$

$$A1): X^{-1}(\Omega_2) = \Omega_1 \in \mathcal{F}_1 \Rightarrow \Omega_2 \in \mathcal{F}$$

$$\begin{aligned} A3): A \in \mathcal{F} &\Rightarrow \{\omega \in \Omega_1 : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}_1 \\ &\Rightarrow \mathcal{F}_1 \ni \{\omega \in \Omega_1 : X(\omega) \in A\}^c = \{\omega \in \Omega_1 : X(\omega) \in A^c\} \\ &\Rightarrow A^c \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A2') \{A_n\} \in \mathcal{F} &\Rightarrow \{\omega : X(\omega) \in A_n\} \in \mathcal{F}_1 \forall n \geq 1 \\ &\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega : X(\omega) \in A_n\} = \left\{ \omega : X(\omega) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right\} \\ &\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}_2 = \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{F}$$

□

1.3 Wahrscheinlichkeitsmaße

1.16 Definition. Sei \mathcal{F} eine Algebra auf Ω . Die Funktion $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$ ist ein Maß, falls

$$\mu 1) \quad \mu(\emptyset) = 0$$

$$\mu 2) \quad \{A_n\} \subset \mathcal{F} \text{ paarweise disjunkt mit } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F} :$$

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Ferner heißt ein Maß μ :

- Wahrscheinlichkeitsmaß, falls $\mu(\Omega) = 1$
- ein endliches Maß, falls $\mu(\Omega) < \infty$
- σ -endliches Maß, falls $\exists D_n : \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \Omega$

1.17 Beispiel. Lebesguemaß auf

- $[0, 1]$ ist ein W'maß
- $[a, b]$; $a < b$; $a, b \in \mathbb{R}$ ein endliches Maß
- \mathbb{R} ist ein σ -endliches Maß
($D_n = [-n, n] \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \mathbb{R}, \lambda(D_n) = 2n < \infty$)

1.18 Satz. Sei $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ eine additive Mengenfunktion mit $P(\Omega) = 1$. Dann gilt: P ist ein W'maß \Leftrightarrow

$$P \text{ stetig von oben} \left(B_n \supseteq B_{n-1} \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow P \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) \right)$$

Beweis. \Rightarrow P sei W'maß. $B_n \supseteq B_{n+1} \quad \forall n \geq 1$; $C_n := B_n \setminus B_{n+1} \quad \forall n \geq 1$
 $\{C_n\}$ paarweise disjunkte Mengen

$$B_n = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) \cup \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} C_k \right); \quad n \geq 1$$

$$\stackrel{(M2)}{\Rightarrow} P(B_n) = P \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) + \sum_{k=n}^{\infty} P(C_k)$$

$$\begin{aligned}
n=1: P(B_1) &= P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) + \sum_{k=1}^{\infty} P(C_k) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} P(C_k) \text{ konvergiert} \\
&\Rightarrow \sum_{k=n}^{\infty} P(C_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow P(B_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^n B_i\right) + \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} P(C_k)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \\
&\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right)
\end{aligned}$$

$\Leftarrow A_n$ paarweise disjunkte Mengen und $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

$$\text{Additivität von } P \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) - P\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) \right| = \\
&= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) - \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right)
\end{aligned}$$

$$B_n := \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i \Rightarrow B_n \supseteq B_{n+1} \text{ und } \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \emptyset$$

$$\text{Stetigkeit von oben: } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = P(\emptyset) = 0$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

□

1.19 Beispiel. $(0, 1] = \Omega$, $\epsilon = \{(x, y) : 0 \leq x < y \leq 1\}$, $\forall (x, y) \in \epsilon$ ist die Länge des Intervalls $y-x$

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{i=1}^n (x_i, y_i] : n \geq 1, 0 \leq x_1 < y_1 < x_2 < \dots \leq 1 \right\}$$

$$\text{Länge von } \bigcup_{i=1}^n (x_i, y_i] = \sum_{i=1}^n y_i - x_i$$

1.20 Definition. Eine Mengenfunktion $\mu^* : 2^\Omega \rightarrow [0, \infty]$ heißt äußeres Maß falls:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$
2. μ^* ist monoton, d.h. $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ falls $A \subset B$
3. μ^* ist subadditiv, d.h.

$$\mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \quad \forall \{A_n\} \in 2^\Omega$$

$$A \subset \Omega \Rightarrow \exists \{B_n\} \subset \mathcal{F} \text{ mit } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \quad (B_1 = \Omega, B_i = \emptyset \quad \forall i \geq 2)$$

$$\gamma(A) = \{\text{die Menge aller Überdeckungen von } A\}$$

$$P^*(A) = \inf_{\{B_n\} \in \gamma(A)} \left(\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \right)$$

1.21 Lemma. Die Funktion P^* ist ein äußeres Maß. Ferner sind $\{A_n\}$ paarweise disjunkte Mengen aus \mathcal{F} , so gilt: $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Beweis. 1. $P^*(\emptyset) = 0, B_n = \emptyset \quad \forall n \geq 1; \{B_n\} \in \gamma(\emptyset)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = 0 \Rightarrow P^*(\emptyset) = 0$$

2. $A \subset B \Rightarrow$ jede Überdeckung von B ist auch eine von A
 $\Rightarrow \gamma(A) \supseteq \gamma(B) \Rightarrow P^*(A) = \inf_{\gamma(A)} \leq \inf_{\gamma(B)} = P^*(B)$

3. $\forall \epsilon > 0 \quad \forall n \geq 1 \exists \left\{ B_m^{(n)} \right\}_{m=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} P\left(B_m^{(n)}\right) \leq P^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \leq \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m^{(n)} \text{ d.h. } B_m^{(n)} \in \gamma\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \quad \forall m, n \geq 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &\leq \sum_{n,m=1}^{\infty} P\left(B_m^{(n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} P\left(B_m^{(n)}\right) \right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(P^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} P^*(A_n) + \epsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow P^*$ subadditiv.

Es bleibt noch zu zeigen: $\{A_n\}$ paarweise disjunkt und $A_n \in \mathcal{A}$

$$\Rightarrow P^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Sei $\{B_n\} \in \gamma(A) \Rightarrow C_1 = B_1, C_2 = B_2 \cap B_1^c, \dots, C_n = B_n \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} B_i^c \right), \dots$

$\Rightarrow \{C_n\}$ paarweise disjunkt und $C_n \in \mathcal{A} \forall n \geq 1, \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$

$\Rightarrow \forall \{B_n\} \in \gamma(A) \exists \{C_n\}$ paarweise disjunkt, $\{C_n\} \in \gamma_d(A)$

$\gamma_d(A) = \{\text{Menge aller paarweise disjunkten Überdeckungen von } A\}$

Wegen Monotonie von P: $P(C_n) \leq P(B_n) \forall n \leq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(C_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)$

$$\Rightarrow P^*(A) = \inf_{\{B_n\} \in \gamma(A)} \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \inf_{\{C_n\} \in \gamma_d(A)} \sum_{n=1}^{\infty} P(C_n)$$

Sei jetzt $\{C_m\} \in \gamma_d \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap C_m) = A_n \in \mathcal{A}; \forall n \geq 1$

$$\Rightarrow P(A_n) = \sum_{m=1}^{\infty} P(A_n \cap C_m) \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P(A_n \cap C_m) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap C_m)$$

$$\Rightarrow {}^1 \sum_{n=1}^N P(A_n \cap C_m) = P \left(C_m \cap \left(\bigcup_{n=1}^N A_n \right) \right) \leq P(C_m) \forall N > 1$$

$$N \rightarrow \infty : \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap C_m) \leq P(C_m) \quad m \geq 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \leq \sum_{m=1}^{\infty} P(C_m) \quad \forall \{C_m\} \in \gamma_d(A)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) &\leq \inf_{\{C_n\} \in \gamma_d(\bigcup A_n)} \sum_{m=1}^{\infty} P(C_m) \\ &= P^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \quad \{A_n\} \in \gamma_d \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \end{aligned}$$

¹Monotonie von P

$$\Rightarrow P^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Wir schreiben $A \nabla B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$
 $\rho(A, B) := P^*(A \nabla B)$ □

Eigenschaften (von ρ): a) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$, $\rho(A, A) = 0$

b) $\rho(A^c, B^c) = \rho(A, B)$

c) $\rho(A, C) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C)$

d) $\rho \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \rho(A_n, B_n)$

e) $|P^*(A) - P^*(B)| \leq \rho(A, B)$

Beweis. d) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$

$$\begin{aligned} A \triangle B &= \left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n^c \right) \right] \cup \left[\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) \right] = \\ &= \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_n^c) \right] \cup \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n^c \cap B_n) \right] = \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} [(A_n \cap B_n^c) \cup (A_n^c \cap B_n)] = \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \triangle B_n) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(A \triangle B) \leq 2P^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \triangle B_n \right) \leq {}^3 \sum_{n=1}^{\infty} P^*(A_n \triangle B_n)$$

e) $A \subseteq B \cup (A \triangle B)$ und $B \subseteq A \cup (A \triangle B)$
 $\Rightarrow P^*(A) \leq P^*(B) + P^*(A \triangle B)$ und $P^*(B) \leq P^*(A) + P^*(A \triangle B)$
 $\Rightarrow -P^*(A \triangle B) \leq P^*(A) - P^*(B) \leq P^*(A \triangle B)$ □

1.22 Definition. Die Menge $A \subset \Omega$ heißt approximierbar, falls es eine Folge

$A_n \subseteq \mathcal{A}$ gibt, mit $\rho(A, A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$\mathcal{F} := \{\text{Menge aller approximierbaren } A \in \Omega\}$

1.23 Lemma. \mathcal{F} ist eine σ -Algebra

²Mon. von P^*

³ σ -Subadd.

Beweis. A1) Jede Menge $A \in \mathcal{A}$ ist approximierbar und $\Omega \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \in \mathcal{F}$

A3) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \exists \{A_n\} \subseteq \mathcal{A} : \rho(A, A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ für $\rho(A^c, A_n^c) \stackrel{b)}{=} \rho(A, A_n) \rightarrow 0 \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

A2') $\{A_n\}$ paarweise disjunkte $A_n \in \mathcal{F}$, $n \geq 1$. Zuerst zeigen wir, dass wenn $\{A_n\} \subseteq \mathcal{A}$, dann gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{k=1}^{\infty} P^*(A_k) \leq P^*(\Omega) = 1 \Rightarrow \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \rightarrow 0; \forall n \rightarrow \infty$$

$$\rho\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \bigcup_{k=1}^n A_k\right) = P^*\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=n+1}^{\infty} P(A_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Sei jetzt $\{A_n\} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \exists \{B_n\} \subseteq \mathcal{A}$, so dass $\rho(A_n, B_n) \leq \frac{\epsilon}{2^n}$, $n \geq 1$
 $\Rightarrow \rho\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \stackrel{d)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \rho(A_n, B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon$.

Ausserdem haben wir bewiesen, dass $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}$

$$\Rightarrow \rho\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcup_{k=1}^n B_k\right) \stackrel{c)}{\leq} \underbrace{\rho\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right)}_{\leq \epsilon} + \underbrace{\rho\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcup_{k=1}^n B_k\right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

$$\Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \rho\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcup_{k=1}^n B_k\right) \leq \epsilon \forall \epsilon > 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcup_{k=1}^n B_k\right) = 0 \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

□

1.24 Satz (Caratheodory's Fortsetzungssatz). *Das W' maß P auf \mathcal{A} kann auf genau eine Weise zu einem W' maß auf \mathcal{F} fortgesetzt werden.*

Beweis. $\forall A \in \mathcal{F}$. Wähle $\overline{P(A)} = P^*(A) \Rightarrow \overline{P(A)} = P(A)$; $\forall A \in \mathcal{A}$
 $\Rightarrow \overline{P(\Omega)} = P(\Omega) = 1 \Rightarrow$ bleibt nur σ -Additivität von \overline{P} zu zeigen.
 Zuerst zeigen wir, dass \overline{P} additiv ist, d. h. A, B disjunkt

$$\Rightarrow \overline{P}(A \cup B) = \overline{P}(A) + \overline{P}(B)$$

$A, B : A \cap B = \emptyset, A, B \in \mathcal{F} \exists \{A_n\}, \{B_n\} : \rho(A_n, A) \rightarrow 0$ und $\rho(B_n, B) \rightarrow 0$

$$|P^*(A) - P^*(A_n)| \stackrel{e)}{\leq} \rho(A \cup B, A_n \cup B_n) \leq \rho(A_n, A) + \rho(B_n, B) \rightarrow 0$$

$$P^*(A_n \cup B_n) = P(A_n \cup B_n) = P(A_n) + P(B_n) - P(A_n \cap B_n) \quad (1.1)$$

$$|P^*(A) - P^*(A_n)| \stackrel{e)}{\leq} \rho(A, A_n) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow P^*(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P^*(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \quad (1.2)$$

$$P^*(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} P^*(A_n \cap B_n) &\leq P^*(A_n \cap B) + P^*(B_n \cap B) \\ &\leq P^*(A_n \cap A^c) + P^*(B_n \cap B) \\ &\leq \rho(A, A_n) + \rho(B, B_n) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$\stackrel{1.1)-1.4)}{\Rightarrow} P^*(A \cup B) = P^*(A) + P^*(B) \Rightarrow$ Additivität von \bar{P} .

Seien $\{A_N\}$ paarweise disjunkte Mengen aus \mathcal{F} . Additivität von \bar{P}

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \sum_{k=1}^n \bar{P}(A_k) + \bar{P}\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right) \\ \Rightarrow \bar{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &\geq \sum_{k=1}^n \bar{P}(A_k) \quad \forall n \geq 1 \\ &\Rightarrow \bar{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \bar{P}(A_k) \\ \bar{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= P^*\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P^*(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{P}(A_k) \\ &\Rightarrow P\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{P}(A_k) \end{aligned}$$

Sei jetzt P_1 ein weiteres W'Maß auf $\mathcal{F} : P_1(A) \rightarrow P(A); \forall A \in \mathcal{A}$. Wir nehmen an, dass: $\exists A_0 \in \mathcal{F} : P_1(A_0) - \bar{P}(A_0) = \epsilon > 0$. Nach Lemma 1.21 $\exists \{B_n\} \in \gamma_d(A_0)$ so dass $\sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) - \underbrace{P^*(A_0)}_{\bar{P}(A_0)} < \epsilon/2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_1(A_0) &= \bar{P}(A_0) + \epsilon \geq \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) - \epsilon/2 + \epsilon = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) + \epsilon/2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P_1(B_n) + \epsilon/2 \end{aligned}$$

$$A_0 \subseteq \sum_{k=1}^{\infty} B_k \text{ Widerspruch} \Rightarrow P_1(A_0) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P_1(B_n)$$

$$P_1(A_0) \geq \epsilon/2 + \sum_{k=1}^{\infty} P_1(B_k) \Rightarrow P_1(A) \leq \bar{P}(A) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

$$P_1 \text{ ist W'Maß} \Rightarrow |P_1(A) - P_2(B)| \leq P_1(A \triangle B) \leq \bar{P}(A \triangle B) = \rho(A, B)$$

$$\stackrel{A \in \mathcal{F}}{\Rightarrow} \exists \{B_n\} : \rho(A, B_n) \rightarrow 0 \Rightarrow |P_1(A) - P_1(B_n)| \leq \rho(A, B_n) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow P_1(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_1(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = \bar{P}(A) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

□

Korollar. Ein W'Maß P auf Algebra \mathcal{A} kann auf genau eine Weise zu W'Maß \bar{P} auf $\sigma(\mathcal{A})$ fortgesetzt werden.

1.25 Bemerkung. Sei P ein W'Maß auf σ -Algebra \mathcal{F} , sei \mathcal{A} eine Algebra mit $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$. Dann gilt: $\forall A \in \mathcal{F} \exists \{A_n\} \subset \mathcal{A} : P(A \triangle A_n) \rightarrow 0$

1.26 Beispiel (Lebesgue-Maß auf $[0, 1]$). $\mathcal{A} = \{\bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]\} \Rightarrow$ Lebesgue-Maß auf \mathcal{F} . \mathcal{F} heißt Lebesgue'sche σ -Algebra. $\mathcal{F} \supset \mathcal{B}([0, 1])$.

$\mathcal{N}_\lambda = \{A \subset 2^{[0,1]} : \exists B \in \mathcal{B}([0, 1]) \text{ mit } \lambda(B) = 0 \text{ und } A \subset B\}$
 $\exists A \in \mathcal{N}_\lambda : A \in \mathcal{B}([0, 1])$

Definition (Motivation:). P_1 W'Maß auf (Ω, \mathcal{F}_1) , P_2 W'Maß auf (Ω, \mathcal{F}_1) , \mathcal{F}_i die jew. σ -Algebra. Wir wissen $P_1(A) = P_2(A) \quad \forall A \in \epsilon$, $\epsilon : \epsilon \subset \mathcal{F}_1, \epsilon \subset \mathcal{F}_2$. Wann können wir sagen, dass $P_1 = P_2$ auf $\sigma(\epsilon)$

1.27 Definition. ϵ heißt π -System, falls es schnittstabil ist, d.h. $A, B \in \epsilon \Rightarrow A \cap B \in \epsilon$

1.28 Definition. \mathcal{L} heißt λ -System, falls gilt:

$$L1) \quad \Omega \in \mathcal{L}$$

$$L2) \quad A, B \in \mathcal{L} : B \in A \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{L}$$

$$L3) \quad \{A_n\} \subset \mathcal{L} : A_n \nearrow A \Rightarrow A \in \mathcal{L}$$

1.29 Lemma. Sei ϵ ein Mengensystem. Dann existiert das kleinste λ -System $\delta(\epsilon)$ mit $\epsilon \subseteq \delta(\epsilon)$:

$$\delta(\epsilon) = \bigcap_{\{\mathcal{L} \text{ ist } \lambda\text{-system und } \epsilon \subseteq \mathcal{L}\}}$$

1.30 Satz (Dynkinscher π - λ -Satz). Sei ϵ ein π -System, dann: $\sigma(\epsilon) = \delta(\epsilon)$

Beweis. “ \supseteq “ Da jede σ -Algebra ein λ -System ist: $\sigma(\epsilon) \supseteq \delta(\epsilon)$

“ \subseteq “ $\forall B \in \delta(\epsilon)$ definiere $D_B = \{A \in \delta(\epsilon) : A \cap B \in \delta(\epsilon)\}$. Zuerst zeigen wir, dass D_B ein λ -System ist:

$$\text{L1)} \quad \Omega \cap B = B \in \delta(\epsilon) \Rightarrow \Omega \in D_B$$

$$\text{L2)} \quad A_1, A_2 \in D_B : A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow (A_2 \setminus A_1) \cap B = \underbrace{(A_2 \cap B)}_{\in \delta(\epsilon)} \setminus \underbrace{(A_1 \cap B)}_{\in \delta(\epsilon)} \in$$

$$\delta(\epsilon) \Rightarrow (A_2 \setminus A_1) \in D_B$$

$$\text{L3)} \quad D_B \supset A_n \uparrow A \Rightarrow A \cap B = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B) \in \delta(\epsilon) \Rightarrow$$

$$A \in D_B$$

Nach Voraussetzung gilt: $A, B \in \epsilon \Rightarrow A \cap B \in \epsilon \Rightarrow \epsilon \subseteq D_B \quad \forall B \in \epsilon$ Aber $\delta(\epsilon)$ ist das kleinste λ -System, das ϵ enthält. Dann $\delta(\epsilon) \subseteq D_B \quad \forall B \in \epsilon$
 \Rightarrow für $A \in \epsilon$ und $B \in \delta(\epsilon)$ gilt $A \cap B \in \delta(\epsilon)$
 $\Rightarrow A \in D_B \quad \forall A \in \epsilon$ und $\forall B \in \delta(\epsilon)$
 $\Rightarrow \epsilon \subseteq D_B \quad \forall B \in \delta(\epsilon) \Rightarrow \delta(\epsilon) \subseteq D_B \quad \forall B \in \delta(\epsilon)$
 $\forall A, B \in \delta(\epsilon)$ gilt: $A \cap B \in \delta(\epsilon)$

$$\text{A1)} \quad \Omega \in \delta\epsilon$$

$$\text{A3)} \quad A, B \in \delta(\epsilon) \Rightarrow A \setminus B = A \setminus \underbrace{(A \cap B)}_{\in \delta(\epsilon)} \in \delta(\epsilon)$$

$$\text{A2')} \quad \{A_n\} \subseteq \delta(\epsilon)$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup ((A_3 \setminus A_1) \setminus A_2) \cup (((A_4 \setminus A_1) \setminus A_2) \setminus A_3) \cup \dots$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$$

$$\{B_k\} \text{ paarweise disjunkt} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^n B_k \nearrow \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \delta(\epsilon)$$

1.31 Satz. Sei ϵ ein π -System. Seien P_1 und P_2 W'Maße auf (Ω, \mathcal{F}_1) und (Ω, \mathcal{F}_2) . Falls $P_1(A) = P_2(A) \quad \forall A \in \epsilon$. Dann gilt: $P_1(A) = P_2(A) \quad \forall A \in \sigma(\epsilon)$

1.32 Korollar. Sei P ein W'Maß auf (Ω, \mathcal{F}) , \mathcal{F} eine σ -Algebra, so ist P durch die Werte auf jedem schnittstabilen Erzeuger von \mathcal{F} eindeutig bestimmt.

Beweis. $\mathcal{L} = \{B \in \sigma(\epsilon) : P_1(B) = P_2(B)\}$ Wenn wir zeigen, dass \mathcal{L} ein λ -System ist, dann folgt aus $\pi - \lambda$ -Satz: $\sigma(\epsilon) = \delta(\epsilon) \subseteq \mathcal{L}$

$$\text{L1)} \quad \Omega \in \mathcal{L}$$

$$\text{L2)} \quad A, B \in \mathcal{L} : B \subseteq A \Rightarrow P_1(A \setminus B) = P_1(A) - P_1(B) = P_2(A) - P_2(B) =$$

$$P_2(A \setminus B) \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$$

L3) $\{B_n\} : B_n \nearrow B \Rightarrow P_1(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_1(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_2(B_n) = P_2(B) \Rightarrow B \in \mathcal{L}$. Also ist \mathcal{L} ein λ -system

□

1.4 Das Integral bzgl eines W'Maßes

(1) Die Funktion $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt einfache Funktion, falls

$$\phi(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega) \quad A_i \in \mathcal{F}, a_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_{\Omega} \phi dP := \sum_{i=1}^n a_i P(A_i)$$

$$\int_A \phi dP := \int_{\Omega} (\phi \mathbb{1}_A) dP = \sum_{i=1}^n A_i P(A \cap A_i)$$

(2) **Integral von einer nicht negativen Funktion**

1.33 Lemma. Sei $\phi \geq 0$ -messbar. Dann existiert eine Folge ϕ_n von einfachen, nicht negativen Funktionen, so dass $\phi_n(\omega) \nearrow \phi(\omega) \forall \omega \in \Omega$

1.34 Lemma. Seien $\{\phi_n\}$ und $\{\psi_n\}$ mit $\phi_n \nearrow \phi$ und $\psi_n \nearrow \psi$. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \phi_n dP = \int_{\Omega} \phi dP \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \psi_n dP = \int_{\Omega} \psi dP$$

1.35 Bemerkung.

$$\int_{\Omega} \phi dP = \sup \left\{ \int_{\Omega} \psi dP : 0 \leq \psi \leq \phi, \psi \text{-einfache Funktion} \right\}$$

Beide Definition sind äquivalent.

(3) **Integral von einer messbaren Funktion**

$$\left. \begin{aligned} \phi^+(\omega) &= \max\{0, \phi(\omega)\} \\ \phi^-(\omega) &= \max\{0, -\phi(\omega)\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \phi^+, \phi^- \text{ sind messbar und } \phi = \phi^+ - \phi^-.$$

In 2 haben wir $\int_{\Omega} \phi^+ dP$ und $\int_{\Omega} \phi^- dP$ definiert. Falls $\int_{\Omega} \phi^+ dP < \infty$ oder $\int_{\Omega} \phi^- dP < \infty$, kann man das Integral $\int_{\Omega} \phi dP = \int_{\Omega} \phi^- dP - \int_{\Omega} \phi^+ dP$ definieren. Die Funktion ϕ heißt integrierbar, falls $\int_{\Omega} |\phi| dP < \infty$
 $(\Leftrightarrow \int_{\Omega} \phi^+ dP < \infty \text{ und } \int_{\Omega} \phi^- dP < \infty)$

Definition (Eigenschaften vom Integral).

1. Falls ϕ integrierbar ist ($\phi \in L^1(P)$), dann gilt: $P(A_n) \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \int_{A_n} \phi dP \rightarrow 0$$

2. $\{A_n\}$ sind paarweise disjunkt und $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \phi dP = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_n} \phi dP$$

3. $\int_{\Omega} (a_1 \phi_1 + a_2 \phi_2) dP = a_1 \int_{\Omega} \phi_1 dP + a_2 \int_{\Omega} \phi_2 dP$

4. $\phi \leq \psi \Rightarrow \int_{\Omega} \phi dP \leq \int_{\Omega} \psi dP$

5. $\left| \int_{\Omega} \phi dP \right| \leq \int_{\Omega} |\phi| dP$

6. $P(\{\phi = 0\}) = 1 \Leftrightarrow \int_{\Omega} \phi dP = 0, \forall \phi \geq 0$

7. Majorisierte Konvergenz: $\psi \in L^1(P)$ und $\{\phi_n\} = |\phi_n| \leq \psi, \forall n \geq 1$.

Dann gilt: $\phi_n(\omega) \rightarrow \phi(\omega); \forall \omega \in \Omega \Rightarrow \int_{\Omega} \phi_n dP \rightarrow \int_{\Omega} \phi dP$

8. Monotone Konvergenz $\phi_n(\omega) \nearrow \phi(\omega) \Rightarrow \int_{\Omega} \phi_n dP \rightarrow \int_{\Omega} \phi dP$

9. Fatou's Lemma: $\phi \in L^1(P), \{\phi_n\} : \phi_n \geq \phi$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \liminf \phi dP \leq \liminf \int_{\Omega} \phi_n dP$$

Sei μ ein endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{F}) \Rightarrow P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} \Rightarrow \int \psi d\mu = \mu(\Omega) \int_{\Omega} \phi dP$

1.36 Lemma. Für jedes σ -endliche Maß μ auf (Ω, \mathcal{F}) gibt es ein W'Maß auf (Ω, \mathcal{F}) und ein $f \geq 0$ messbar :

$$\mu(A) = \int_A f dP \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

Integral bzgl. μ :

$$\int_{\Omega} \phi d\mu = \int_{\Omega} (\phi \circ f) dP$$

Beweis. μ ist σ -endlich $\Rightarrow \{B_n\}$ paarweise disjunkt, $\bigcup B_n = \Omega$, $\mu(B_n) < \infty$

$$P(A) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(A \cap B_n)}{2^n \mu(B_n)} \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

$$P(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(\Omega \cap B_n)}{2^n \mu(B_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1.$$

Seien $\{A_j\}$ paarweise disjunkt.

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \cap B_n\right)}{2^n \mu(B_n)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \mu(B_n)} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \cap B_n) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(A_j \cap B_n)}{2^n \mu(B_n)}}_{=P(A_j)} = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) \end{aligned}$$

$\Rightarrow P$ ist σ -additiv, also ist P ein W'Maß.

Definiere

$$f(\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \mu(B_n) \mathbb{1}_{B_n}(\omega)$$

$f(\omega)$ ist messbar, da alle B_n messbar sind.

$$\int_A f dP = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n dP$$

Wir können schreiben: $f_n(\omega) = \sum_{k=1}^n 2^k \mu(B_k) \mathbb{1}_{B_k}(\omega)$, $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_A f_n dP &= \sum_{k=1}^n 2^k \mu(B_k) P(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^n 2^k \mu(B_k) \frac{\mu(A \cap B_k)}{2^k \mu(B_k)} = \\ &= \sum_{k=1}^n \mu(A \cap B_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A \cap B_k) \\ \Rightarrow \int_A f dP &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A \cap B_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap B_k)\right) = \mu(A) \end{aligned}$$

□

1.5 Zerl. von Maßen & Satz von Radon-Nikodym

Seien μ und ν zwei Maße, Wann kann man sagen, dass $\mu(A) = \int_A f d\nu$?

1.37 Definition. a) μ heißt absolut stetig bezüglich ν , falls $\mu(A) = 0$, $\forall A$ mit $\nu(A) = 0$ ($\mu \ll \nu$)

b) μ heißt singulär bezüglich ν , falls $\exists A : \mu(A) = 0$ und $\nu(A^c) = 0$ ($\mu \perp \nu$)

1.38 Beispiel. 1) μ ein Zählmaß auf \mathbb{Z} , d.h. $\mu(A) = |A \cap \mathbb{Z}|$, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
 $\Rightarrow \mu$ ist singulär bzgl. Lebesgue-Maß. $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \Rightarrow \mu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) = 0$
 $\text{Lebesgue}(\mathbb{Z}) = 0$

2) $\mu(A) = \int_A e^{-x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) dx \Rightarrow \mu \ll \text{Lebesgue-Maß}$
 $A: \text{Lebesgue}(A) = 0 \Rightarrow \int_A e^{-x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) dx = 0$

1.39 Satz (Lebesgue'scher Zerlegungssatz). Seien μ und ν zwei σ -endliche Maße auf (Ω, \mathcal{F}) . Dann lässt sich μ auf eindeutige Weise zerlegen: $\mu = \mu_{ac} + \mu_s$ mit $\mu_{ac} \ll \nu$ und $\mu_s \perp \nu$. ν_s hat Dichte bzgl ν , d.h. $\exists f \geq 0$

$$\mu_{ac}(A) = \int_A f d\nu, \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

1.40 Satz (Radon-Nikodym:). μ, ν seien zwei σ -endliche Maße. Dann gilt:

$$\mu \ll \nu \Leftrightarrow \exists f \geq 0 : \mu(A) = \int_A f d\nu, \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

f ist eindeutig bis auf Werte auf Nullmengen von ν .

Beweis. Seien f_1, f_2 zwei Dichten. $\exists \{B_n\} : B_n \uparrow \Omega$ und $\nu(B_n) < \infty \forall n \geq 1$.
 Definiere $A_n = B_n \cap \{f_1 > f_2\}$

$$\begin{aligned} 0 &= \mu(A_n) - \mu(A_n) = \int_{A_n} f_1 d\nu - \int_{A_n} f_2 d\nu = \int_{A_n} (f_1 - f_2) d\nu \\ &= \int_{\Omega} (f_1 - f_2) \mathbb{1}_{A_n} d\nu \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nu(\{(f_1 - f_2) \mathbb{1}_{A_n} > 0\}) = 0 \Rightarrow \nu(A_n) = 0$$

$$\Rightarrow \nu(\{f_1 > f_2\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(\{f_1 > f_2\} \cap B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = 0 \quad \square$$

1.6 Produktmaß und Satz von Fubini

Seien $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ zwei W'Maße. $\mathcal{A} = \{A_1 \times A_2, A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2\}$ ein Mengensystem auf $\Omega_1 \times \Omega_2$ $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$

1.41 Satz. *Es gibt genau ein W'Maß P auf $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F})$ mit der Eigenschaft*

$$P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1)P_2(A_2) \quad \forall A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2$$

(P heißt Produktmaß, $P = P_1 \times P_2$) \Rightarrow Per Induktion kann man $P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n$ auf $\mathcal{F} = \sigma(\{A_1 \times \dots \times A_n, A_i \in \mathcal{F}_i\})$ definieren.

Beweis. Siehe Durrett, A1 und A6 □

1.42 Satz (v. Fubini). *Sei $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Ist $f \geq 0$ oder $\int |f| dP < \infty$ ($P = P_1 \times P_2$), so gilt*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f dP &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x_1, x_2) P_2(dx_2) \right) P_1(dx_1) = \\ &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x_1, x_2) P_1(dx_1) \right) P_2(dx_2) \end{aligned}$$

Kapitel 2

Zufallsvariablen und Verteilungen

2.1 Verteilungsfunktion

(Ω, \mathcal{F}, P) ein W-Raum und X eine Zufallsvariable mit Werten $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$

2.1 Definition. a) Das W-Maß P_X auf $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ definiert durch

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)), \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$$

heißt Verteilung von X .

b) Die Abbildung $F_X : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, 1]$ gegeben durch

$$F_X(x) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \{X_i \leq x_i\}\right)$$

heißt Verteilungsfunktion von $X = (X_1, \dots, X_m)$
m=1: $\Rightarrow F_X(x) = P(\{X \leq x\}) = P(X \leq x)$

Eigenschaften. F1) F ist monoton wachsend, $(F(x_1) \leq F(x_2), \forall x_1 \leq x_2)$

F2) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$

F3) F ist stetig von rechts, d.h. $x_n \downarrow x \Rightarrow F(x_n) \rightarrow F(x)$

Beweis. F1) $\{X \leq x_1\} \subseteq \{X \leq x_2\} \forall x_1 \leq x_2$
 $\Rightarrow F(x_1) = P(\{X \leq x_1\}) \leq P(\{X \leq x_2\}) = F(x_2)$

F2) $a_n \downarrow -\infty : A_n = \{X \leq a_n\} \Rightarrow A_n \downarrow \emptyset$ also
 $\lim_{n \rightarrow \infty} F(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq a_n) \stackrel{\text{St. von oben}}{=} P(\emptyset) = 0$

$$\text{F3) } B_n = \{X \leq x_n\} \Rightarrow B_n \downarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \stackrel{x_n \downarrow x}{=} \{X \leq x\}$$

$$\text{Stetigkeit von oben: } \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = P(X \leq x) = F(x)$$

□

2.2 Beispiel. a) Ist $p \in [0, 1]$ $P(\{X \leq 1\}) = 1 - P(\{X \leq 0\}) = p$, so heißt P_X Bernoulli-Verteilung mit Parameter p .

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - p, & x \in [0, 1) \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } a < b, P(X \in A) = \frac{\text{Lebesgue}(A \cap (a, b))}{(b-a)}, \quad \forall a \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow P_X\text{-Gleichv. auf } (a, b)$$

$$F(x) = P(X < x) = \frac{\text{Lebesgue}((-\infty, x] \cap (a, b))}{b-a} = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

2.3 Satz. Sei F eine Funktion mit Eigenschaften F_1, F_2 und F_3 . Dann kann man einen W -Raum und eine ZV X konstruieren mit: $F_X = F$

Beweis. $\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}), X(\omega) = \omega \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$

\Rightarrow Uns fehlt nur W -Maß P .

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i] \right\}, \quad \text{wobei } (a_i, b_i] \cap (a_j, b_j] = \emptyset$$

$$-\infty \leq a_i < \infty, -\infty \leq b_i < \infty, (a, \infty] = (a, \infty)$$

$$\mathcal{A} \text{ ist Algebra. } P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1] \text{ mit } P\left(\bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i]\right) = \sum_{i=1}^n (F(b_i) - F(a_i)).$$

Man kann leicht zeigen, dass P σ -additiv ist. (folgt aus F_1 und F_3) und $P((-\infty, \infty)) = 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) \Rightarrow P$ ist W -Maß auf Algebra $\mathcal{A} \Rightarrow$ Man kann P eindeutig auf $\sigma(\mathcal{A})$ fortsetzen. □

2.4 Definition. Sei F eine Funktion mit F_1 - F_3 , so heißt

$$F^{-1}(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\}, \quad t \in (0, 1)$$

Quantilfunktion (verallgemeinerte Inverse).

Alternativer Beweis zu 2.4: $\Omega = (0, 1), \mathcal{F} = \mathcal{B}((0, 1)), P = \lambda|_{(0, 1)}, X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zu konstruieren. Aus Def. 2.4 folgt: $\mathcal{F}^{-1}(t) \leq x \Leftrightarrow t \leq F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, t \in [0, 1]$. $F^{-1}(t)$ ist eine messbare Funktion. $\Rightarrow X(\omega) := F^{-1}(\omega)$ ZV

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega : X(\omega) \leq x\}) = P(\{\omega : \omega \leq F(x)\}) = F(x)$$

□

2.5 Definition. a) Die Verteilung P_X von X heißt absolut stetig, falls $P_X \ll$ Lebesgue-Maß auf \mathbb{R}^m

b) Die Verteilung von X heißt diskret, falls $\exists \{x_k\} \subseteq \mathbb{R}^m : P_X(\{x_k\}) > 0 \forall k \geq 1$ und $\sum_{k=1}^{\infty} P(\{x_k\}) = 1$

Bemerkung. Es kann Mischformen aus den Verteilungstypen geben: $P_X = aP^{(1)} + bP^{(2)}$, wobei $P^{(1)}$ absolut stetig und $P^{(2)}$ diskret, $a, b \geq 0, a + b = 1$

2.6 Bemerkung. Aus dem Fortsetzungssatz folgt:

P_X absolut stetig $\Leftrightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$ $f_X \geq 0$ -messbar. Ist P_X absolut stetig, so ist F_X f.ü. differenzierbar $\Rightarrow f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$

2.7 Definition. Eine Verteilungsfunktion F heißt singulär, falls:

a) F ist stetig

b) Entsprechende Verteilung ist singulär bezüglich dem Lebesgue-Maß

2.8 Beispiel. Cantorfunktion $F(x)$ ist stetig, Maß von Punkten auf denen F konstant ist $= \frac{1}{3} + 2\frac{1}{9} + 4\frac{1}{27} + \dots = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$

2.9 Satz. Für jede Verteilungsfunktion $F(x)$ kann man $F_a(x), F_d(x)$ und $F_s(x)$ finden mit $F(x) = rF_a(x) + pF_d(x) + qF_s(x)$, $r, q, p \geq 0$ und $r + p + q = 1$. Diese Darstellung ist eindeutig

Beweis. Nach Lebesgue'schem Zerlegungssatz existiert eine Zerlegung,

$$P_X(B) = \mu_a(B) + \mu_s(B), \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

wobei hier $\mu_a \ll$ Lebesgue-Maß, $\mu_s \perp$ Lebesgue-Maß. $B = (-\infty, x]$
 $\Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du + \mu_s((-\infty, x])$.

$$F_{as}(x) = \begin{cases} \frac{\int_{-\infty}^x f(u) du}{\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du}, & \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$r = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du, Q(x) = \mu_s((-\infty, x))$$

- Zuerst finden wir alle $\{x_i\}$, so dass $\mu_s(\{x_i\}) \geq \frac{1}{2} (\# \leq 2)$
- dann finden wir alle Punkte mit $\mu_s(\{x_i\}) \geq \frac{1}{3} (\# \leq 3)$
- \vdots
- Alle Punkte mit $\mu_s(\{x_i\}) \geq \frac{1}{n} (\# \leq n)$
 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ die Menge aller Sprünge der Funktion $Q(x)$ ist abzählbar.

$$\sum_{x_k \in K} \mu_s(\{x_k\}) = \sum_{x_k \in K} P(\{x_k\})$$

$$\Rightarrow F_d(x) = \frac{\sum_{x_k \in K} P(\{x_k\})}{\sum_{k \in \mathbb{N}} P(\{x_k\})}, p = \sum_{k=1}^{\infty} P(\{x_k\})$$

$g(x) = F(x) - rF_q(x) - pF_d(x)$ Funktion g ist stetig und wenn $g(\infty) > 0$, dann ist Verteilung mit Verteilungsfunktion $\frac{g(x)}{g(\infty)}$ singulär bezüglich Lebesgue-Maß $q = g(\infty)$, $F_s(x) = \frac{g(x)}{g(\infty)}$

□

2.2 Momente

2.10 Definition. Sei X ZV. Die Größe $\int_{\Omega} X dP$ heißt Erwartungswert von X , falls das Integral Sinn macht, d.h. $(\int_{\Omega} X^+ dP < \infty$ oder $\int_{\Omega} X^- dP < \infty)$ (i. Z.: $\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X dP$)

2.11 Satz. Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine ZV, $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ – messbar. Dann gilt: $\mathbb{E}[h(X)] = \int_{\mathbb{R}^m} h(x) P_X(dx)$

Beweis. 1) Sei h eine einfache Funktion:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(X)] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}(X)\right] = \sum_{i=1}^n a_i P(\{X \in A_i\}) = \sum_{i=1}^n a_i P_X(A_i) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \underbrace{\left(\sum a_i \mathbb{1}_{A_i}(x)\right)}_{h(x)} P_X(dx) \end{aligned}$$

2) Sei jetzt $h \geq 0 \Rightarrow \exists \{h_n\} : h_n \geq 0, \forall n \geq 1$ und $h_n(x) \uparrow h(x) \forall x \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbb{E}[h(X)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[h_n(X)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} h_n(x) P_X(dx) \stackrel{\text{mon. Konv}}{=} \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} h(x) P_X(dx) \end{aligned}$$

3) $h = h^+ + h^-$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(X)] &= \mathbb{E}[h^+(X)] - \mathbb{E}[h^-(X)] \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} h^+(x) P_X(dx) - \int_{\mathbb{R}^m} h^-(x) P_X(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} h(x) P_X(dx) \end{aligned}$$

□

2.12 Korollar. a) Ist P_X absolut stetig mit der Dichte $f(x)$, so gilt

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{\mathbb{R}^m} h(x) f(x) dx$$

b) Ist P_X diskret, so gilt: $\mathbb{E}[h(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} h(x_k) P(X = x_k)$

2.13 Definition. a) $\mathbb{E}[X^n]$ heißt n-tes Moment von X

b) $\text{Var}[X] := E[(X - E[X])^2]$ heißt Varianz.

Eigenschaften (von $\text{Var}[1]:$). 1. $\text{Var}[c] = 0$

2. $\text{Var}[X] = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : P(X = c) = 1$

3. $\text{Var}[X + c] = \text{Var}[X]$

4. $\text{Var}[cX] = c^2 \text{Var}[X]$

5. $\text{Var}[X] = \inf_a \mathbb{E}[(X - a)^2]$

2.14 Satz (Markov'sche Ungleichungen). Sei X eine ZV, $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ monoton wachsend. Dann gilt für alle $\epsilon > 0$ mit $f(\epsilon) > 0$ gilt:

$$P(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[f(|X|)]}{f(\epsilon)}$$

Beweis. $A = \{|X| \geq \epsilon\} \Rightarrow f(|X|) = f(|X|)\mathbf{1}_A + f(|X|)\mathbf{1}_{A^c}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbb{E}[f(|X|)] &= \mathbb{E}[f(|X|)\mathbf{1}_A] + \mathbb{E}[f(|X|)\mathbf{1}_{A^c}] \\ &\geq \mathbb{E}[f(|X|)\mathbf{1}_A] \geq \mathbb{E}[f(\epsilon)\mathbf{1}_A] = f(\epsilon)\mathbb{E}[\mathbf{1}_A] \\ &= f(\epsilon)P(A) \end{aligned}$$

Bemerkung (Einige Spezialfälle). 1. $P(|X| > a) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{a} \quad a > 0$

2. $P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \epsilon) \leq \frac{\text{Var}[X]}{\epsilon^2}$ (Chebyshev Ungleichung)

3. $P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{\lambda X}]}{e^{\lambda a}} \quad \forall \lambda > 0$ (folgt aus Satz 2.14 mit $f(x) = e^{\lambda x}$)

2.15 Satz (Jensen Ungleichung). Sei $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Dann gilt: $\phi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\phi(X)] \Rightarrow \mathbb{E}[X^2] \geq (\mathbb{E}[X])^2, \mathbb{E}[e^{\lambda X}] \geq e^{\lambda \mathbb{E}[X]}$

2.16 Satz (Hölderische Ungleichung). $p, q \in (1, \infty) : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\mathbb{E}[|X \cdot Y|] \leq (\mathbb{E}[|X|^p])^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}[|Y|^q])^{\frac{1}{q}}$$

Kapitel 3

Unabhängigkeit

3.1 Unabhängigkeit von Ereignissen und Zufallsvariablen

3.1 Definition. I sei eine Indexmenge, $\{A_i, i \in I\}$ eine Familie von Ereignissen.

- (a) Die Familie $\{A_i, i \in I\}$ heißt unabhängig, falls für alle endlichen Teilmengen $J \subseteq I$ gilt:

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

- (b) $\{A_i, i \in I\}$ heißt paarweise unabhängig, falls $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$

3.2 Beispiel (Beispiel von Bernstein). eine Seite rot, eine grün, eine schwarz und eine rot-grün-schwarz. Seien:

- $A_r = \{\text{Wir erhalten eine rote Farbe}\}$
- $A_g = \{\text{Wir erhalten eine grüne Farbe}\}$
- $A_s = \{\text{Wir erhalten eine schwarze Farbe}\}$

$$P(A_r) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = P(A_g) = P(A_s)$$

$$P(A_r \cap A_g) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} = P(A_r \cap A_s) = P(A_g \cap A_s)$$

$\Rightarrow A_r, A_s, A_g$ paarweise unabhängig, aber
 $P(A_r \cap A_g \cap A_s) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A_r)P(A_s)P(A_g)$

3.3 Satz. Sei $\{A_i, i \in I\}$ eine Familie von Ereignissen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) $\{A_i, i \in I\}$ sind unabhängig

b) $\exists \alpha \in \{0, 1\}^I : \{B_i^{\alpha_i}, i \in I\}$ ist unabhängig wobei $B_i^0 := A_i, B_i^1 = A_i^c$

c) $\{B_i^{\alpha_i}, i \in I\}$ ist unabhängig $\forall \alpha \in \{0, 1\}^I$

Beweis. Übung □

3.4 Satz (Borel-Cantelli Lemma). Seien $\{A_i\}_{i \geq 1}$ Ereignisse. Sei:

$$A^* = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n = \{A_n \text{ tritt ein für unendlich viele } n\}$$

a) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, so gilt $P(A^*) = 0$

b) Ist $\{A_n\}$ unabhängig und $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, so $P(A^*) = 1$

Satz. Ist $\{A_n\}$ unabhängig, dann gilt: $P(A^*) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$

Beweis. (a) $P(A^*) = \lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) \stackrel{1}{\leq} \limsup_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=m}^{\infty} P(A_n) = 0$

(b)

$$\begin{aligned} P((A^*)^c) &= P\left(\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right)^c\right) = P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c\right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c\right) \\ &= P\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c\right) = \lim_{M \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{n=m}^M A_n^c\right) \end{aligned}$$

Jetzt geben uns die Unabhängigkeit von $\{A_i\}$ und Satz 3.3, dass

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{n=m}^M A_n^c\right) &= \prod_{n=m}^M P(A_n^c) = \prod_{n=m}^M (1 - P(A_n)) \\ 1 - x &\leq e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow P\left(\bigcap_{n=m}^M A_n^c\right) \leq \prod_{n=m}^M e^{-P(A_n)} = e^{-\sum_{n=m}^M P(A_n)} \\ &\Rightarrow P\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c\right) \leq \limsup_{M \rightarrow \infty} e^{-\sum_{n=m}^M P(A_n)} = 0, \end{aligned}$$

¹Gleichheit gilt, wegen Stetigkeit von P $\left(B_m := \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n \Rightarrow B_m \searrow \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m = A^*\right)$

² σ -Subadditivität von P

$$\begin{aligned} & \text{da } - \sum_{n=m}^M P(A_n) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty \\ & \Rightarrow P\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c\right) = 0 \Rightarrow P((A^*)^c) = \lim_{m \rightarrow \infty} 0 = 0 \end{aligned}$$

□

3.5 Definition. Sei I eine Indexmenge und $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{F} \forall i \in I$. Die Familie $\{\mathcal{A}_i\}$ heißt unabhängig, falls für jede endliche Teilmenge $J \subseteq I$ gilt:

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j) \quad \forall A_j \in \mathcal{A}_j$$

3.6 Definition. ZVen $\{X_i, i \in I\}$ heißen unabhängig, falls $\{\sigma(X_i), i \in I\}$ unabhängig ist.

3.7 Bemerkung. Äquivalent kann man Unabhängigkeit von ZVen so definieren: $\{X_i, i \in I\}$ unabhängig $\Leftrightarrow \forall J \subset I$ endlich:

$$P\left(\bigcap_{j \in J} \{X_j \in B_j\}\right) = \prod_{j \in J} P(X_j \in B_j) \quad \forall B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$\sigma(X_i) = \{X_i^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

3.8 Satz. Sind $\{\mathcal{A}_i, i \in I\}$ unabhängige π -Systeme, so sind $\{\sigma(\mathcal{A}_i), i \in I\}$ unabhängig.

Beweis. $\mathcal{D}_i = \mathcal{A}_i \cup \Omega \Rightarrow \mathcal{D}_i$ ist ein π -System $\forall i \in I$. Ferner sind $\{\mathcal{D}_i, i \in I\}$ unabhängig. $\sigma(\mathcal{A}_i) = \sigma(\mathcal{D}_i) \forall i \in I$. Sei $J \subseteq I$ endlich, $j_0 \in J$

Unabhängigkeit von \mathcal{D}_i impliziert $P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j), A_j \in \mathcal{D}_j$.

$$\text{Definiere } \mathcal{L} = \left\{ A \in \mathcal{F} : P\left(A \cap \bigcap_{j \in J \setminus j_0} A_j\right) = P(A) \cdot \prod_{j \in J \setminus j_0} P(A_j) \right\}$$

Es gilt:

1. $\mathcal{D}_{j_0} \subseteq \mathcal{L}$
2. \mathcal{L} ist ein λ -System (Übung) \Rightarrow Nach $\pi - \lambda$ -Satz, $\sigma(\mathcal{D}_{j_0}) \subseteq \mathcal{L}$
 $\Rightarrow \{\sigma(\mathcal{D}_{j_0}), \mathcal{D}_j, j \in J \setminus j_0\}$ unabhängig.

Mit Induktion: $\{\sigma(\mathcal{D}_j), j \in J\}$ sind unabhängig.

□

3.9 Korollar. *ZVen $\{X_i\}_{i=1}^n$ sind genau dann unabhängig, wenn:*

$$P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x_i) \quad \forall x_i \in \mathbb{R}$$

3.10 Korollar. *Seien*

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_{1,1}, \quad \dots, \mathcal{F}_{1,m_1} \\ &\mathcal{F}_{2,1}, \quad \dots, \mathcal{F}_{2,m_2} \\ &\vdots \\ &\mathcal{F}_{n,1}, \quad \dots, \mathcal{F}_{n,m_n} \end{aligned}$$

unabhängige σ -Algebren. Sei $\mathcal{A}_i := \sigma\left(\bigcup_{j=1}^{m_i} \mathcal{F}_{i,j}\right)$. Dann sind $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^n$ unabhängig.

Beweis. Sei $\mathcal{D}_i = \left\{ \bigcup_{j=1}^{m_i} A_{i,j} : A_{i,j} \in \mathcal{F}_{i,j} \right\}$. Offensichtlich ist \mathcal{D}_i ein π -System für alle i . Außerdem sind $\{\mathcal{D}_i\}_{i=1}^n$ unabhängig. Nach Satz 3.8 sind $\{\sigma(\mathcal{D}_i)\}_{i=1}^n$ unabhängig. Aber $\bigcup_{j=1}^{m_i} \mathcal{F}_{i,j} \subseteq \mathcal{D}_i \Rightarrow \underbrace{\sigma\left(\bigcup_{j=1}^{m_i} \mathcal{F}_{i,j}\right)}_{\mathcal{A}_i} \subseteq \sigma(\mathcal{D}_i) \Rightarrow \{\mathcal{A}_i\}$ sind unabhängig. □

3.11 Korollar. *Sind*

$$\begin{aligned} &X_{1,1}, \quad \dots, X_{1,m_1} \\ &X_{2,1}, \quad \dots, X_{2,m_2} \\ &\vdots \\ &X_{n,1}, \quad \dots, X_{n,m_n} \end{aligned}$$

unabhängig und $f_i : \mathbb{R}^{m_i} \rightarrow \mathbb{R}$ messbar für $i \in [1, n]$. Dann sind $\{f_i : (X_{i,1}, \dots, X_{i,m_i})\}_{i=1}^n$ unabhängig.

3.2 Eigenschaften von unabhängigen Zufallsvariablen

3.12 Satz. *Seien X_1, \dots, X_n unabhängige Zufallsvariablen, dann hat der Vektor (X_1, \dots, X_n) die Verteilung $P_{X_1} \times P_{X_2} \times \dots \times P_{X_n}$*

Beweis. $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} P((X_1, \dots, X_n) \in A_1 \times \dots \times A_n) &= P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \in A_i\}\right) \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i \in A_i) = \prod_{i=1}^n P_{X_i}(A_i) \end{aligned}$$

\Rightarrow Die Verteilung von (X_1, \dots, X_n) stimmt mit $P_{X_1} \times \dots \times P_{X_n}$ überein auf $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : A = A_1 \times \dots \times A_n\}$; \mathcal{A} ist ein π -System und ein Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ $\xRightarrow{\text{Eindeutigkeitssatz:}}$ $P(X_1, \dots, X_n) = \bigotimes_{i=1}^n P_{X_i}$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ \square

3.13 Satz. Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungen P_X und P_Y . Ist $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Funktion mit $h \geq 0$ oder $\mathbb{E}[|h(X, Y)|] < \infty$ so gilt:

$$\mathbb{E}[h(X, Y)] = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(X, Y) P_X(dx) \right) P_Y(dy)$$

Bemerkung (Spezialfall:). $h(X, Y) = f(X)g(Y)$. Falls $f \geq 0$, $g \geq 0$ oder $\mathbb{E}[|f(X)|] < \infty$, $\mathbb{E}[|g(Y)|] < \infty$, so gilt:

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)] \mathbb{E}[g(Y)]$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(X, Y)] &= \int_{\mathbb{R}^2} h(X, Y) P(X, Y)(dx, dy) = \int_{\mathbb{R}^2} h(X, Y) P_X(dx) \times P_Y(dy) \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(X, Y) P_X(dx) \right) P_Y(dy) \end{aligned}$$

Im Spezialfall:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X)g(Y)] &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(X)g(Y) P_X(dx) \right) P_Y(dy) \\ &= \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} g(Y) P_Y(dy) \right)}_{\mathbb{E}[g(Y)]} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} f(X) P_X(dx) \right)}_{\mathbb{E}[f(X)]} \end{aligned}$$

\square

3.14 Korollar. Sind X_1, \dots, X_n unabhängig und $\mathbb{E}[|X_i|] < \infty$. Dann gilt $\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n X_i\right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]$. Außerdem, wenn $\mathbb{E}[X_i^2] < \infty$, dann $\text{Var}[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i]$

Beweis. Seien X_1 und X_2 unabhängig.

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[X_1 + X_2] &= \mathbb{E} \left[(X_1 + X_2 - \mathbb{E}[X_1] - \mathbb{E}[X_2])^2 \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[(X_1 - \mathbb{E}[X_1])^2 + 2(X_1 - \mathbb{E}[X_1]) \right. \\
 &\quad \left. (X_2 - \mathbb{E}[X_2]) + (X_2 - \mathbb{E}[X_2])^2 \right] \\
 &= \text{Var}[X_1] + 2 \underbrace{\mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}[X_1])(X_2 - \mathbb{E}[X_2])]}_{\substack{\mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}[X_1])]\mathbb{E}[(X_2 - \mathbb{E}[X_2])] \\ =0}} + \text{Var}[X_2] \\
 &\quad \underbrace{\mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}[X_1])]}_{=0} \underbrace{\mathbb{E}[(X_2 - \mathbb{E}[X_2])]}_{=0}
 \end{aligned}$$

□

3.15 Definition. Seien X, Y Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X^2] < \infty, \mathbb{E}[Y^2] < \infty$. Dann heißt $\text{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$ Kovarianz zwischen X und Y . Sind X, Y unabhängig so sind sie auch unkorreliert ($:= \text{Cov}[X, Y] = 0$). Umgekehrt gilt das nicht.

Bemerkung (Beispiel). Sei X ZV mit der Dichte $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ und $Y = X^2$:

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}[X, Y] &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[(X - \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{=0})(X^2 - \underbrace{\mathbb{E}[X^2]}_{=1})] \\
 &= \mathbb{E}[X(X^2 - 1)] = \mathbb{E}[X^3] - \mathbb{E}[X] = 0
 \end{aligned}$$

Satz (Formel für die Varianz).

$$\text{Var} \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i] + \sum_{\substack{i, l=1 \\ i \neq l}}^n \text{Cov}[X_i, X_l]$$

3.16 Korollar. Sind X, Y unabhängig, so gilt:

$$P(X + Y \in A) = \int_{\mathbb{R}} P_X(A - Y) P_Y(dy) \text{ für } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Beweis. $h(X, Y) = \mathbb{1}_A(X + Y)$. Nach Satz 3.13 :

$$\begin{aligned}
 P(X + Y \in A) &= \mathbb{E}[h(X, Y)] = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(X + Y) P_X(dx) P_Y(dy) \right) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A-Y}(X) P_X(dx) \right) P_Y(dy)
 \end{aligned}$$

□

3.17 Definition. Das W'Maß $P_1 \times P_2(A) = \int_{\mathbb{R}} P_1(A - Y) P_2(dy)$ heißt Faltung von P_1 und P_2

1. Konstruktion von endlich vielen, unabhängigen Zufallsvariablen

Sei $\Omega = (0, 1)^n$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}((0, 1)^n)$, $p = \text{Lebesgue-Maß auf } (0, 1)^n$. Dann sind $\xi_i : (\xi_i(\omega) = \omega_i)$ unabhängig \Rightarrow Wir haben n unabhängige ZVn auf einem Raum, aber alle ξ_i sind gleichverteilt auf $(0, 1)^n$. X_1, \dots, X_n
 $X_i := F_{X_i}^{-1}(\xi_i)$. Alle X_i sind Funktionen von unabhängigen ZVn \Rightarrow Alle X_i sind unabhängig.

2. Beliebige viele unabhängige ZVn

Sei I eine Indexmenge, $\Omega = (0, 1)^I$. Die Menge $A \subseteq (0, 1)^I$ heißt zylindrische Menge, falls $A = \bigotimes_{i \in I} A_i$ wobei nur endlich viele $A_i \neq (0, 1)$ sind. $\mathcal{F} = \sigma(\{A : A \text{ ist Zylindermenge}\})$. Jede Zylindermenge mit Basis J hat das Maß $p(A) := \prod_{j \in J} \lambda(A_j)$, wobei λ das Lebesguemaß darstellt. Seien $J_1 \supseteq J_2$ zwei Basen von A , dann ist $P_{J_1}(A) = P_{J_2}(A)$. Also hier haben wir eine Familie $\{P_J\}$ von Maßen.

Kolmogorov'scher Satz

Es gibt genau dann ein W'Maß P auf $((0, 1)^I, \mathcal{F})$, so dass $P(A) = P_J(A) \forall A$ mit Basis $J \forall J$. $\xi(\tilde{\omega}) = \omega_i$ wieder unabhängig $\Rightarrow |I|$ unabhängige Zufallsvariablen. $\{X_i = F_{X_i}^{-1}(\xi_i), i \in I\}$.

3.3 Kolmogorov'sches 0-1-Gesetz

$$P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) \in \{0, 1\} \text{ falls } \{A_i\} \text{ unabhängig.}$$

3.18 Definition. Seien $\{X_i\}_{i \geq 1}$ unabhängig. Die σ -Algebra

$$\mathcal{F} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(X_n, X_n + 1, \dots) \text{ heißt terminale } \sigma\text{-Algebra}$$

3.19 Beispiel. a) $\{A_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} A &= \{X_m \in A_n \text{ für unendliche viele } n\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{i=n}^{\infty} \{X_i \in A_i\}}_{\text{absteigende Folge}} = \bigcap_{n=N}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{i=n}^{\infty} \{X_i \in A_i\}}_{\in \sigma(X_N, X_{N+1}, \dots)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A \in \bigcap_{N=1}^{\infty} \sigma(X_N, X_{N+1}, \dots) \Rightarrow A \text{ ist terminales Ereignis.}$$

b) X_1, X_2, \dots unabhängige ZVen. $S_n = \sum_{i=1}^n X_i, n \geq 1$

$$\left\{ \frac{S_n}{n} \rightarrow 0 \right\} = \left\{ \underbrace{\frac{X_k + X_k + \dots + X_n}{n} \rightarrow -}_{\in \sigma(X_k, X_{k+1}, \dots)} \right\} \Rightarrow \left\{ \frac{S_n}{n} \rightarrow n \right\} \in \mathcal{F}$$

3.20 Satz (Kolmogorov'sches 0-1-Gesetz). Seien $\{X_i\}$ unabhängig. Dann gilt $P(A) \in \{0, 1\} \forall A \in \mathcal{A} \in \mathcal{T}$

Beweis. $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n), n \geq 1 \Rightarrow \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1} \forall n \geq 1$. Das Mengensystem $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ ist eine Algebra. Ausserdem gilt: $\mathcal{T} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$.

$$\Rightarrow \exists \{A_n\} \in \mathcal{A} : P(A \Delta A_n) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

(Folgt aus Bemerkung zum Fortsetzungssatz). Ferner sei $k_n : A_n \in \mathcal{F}_{k_n}$ für jedes $n \geq 1$. Da $A \in \sigma(X_{k_n+1}, X_{k_n+2}, \dots)$ und $A_n \in \mathcal{F}_{k_n} = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_{k_n})$. (\mathcal{F}_{k_n} und $\sigma(X_{k_n+1}, X_{k_n+2}, \dots)$ sind unabhängig voneinander)
 $\Rightarrow P(A \cap A_n) = P(A)P(A_n) \forall n \geq 1$.

$$P(A_n \cap A) = P(A) - \underbrace{P(A \setminus A_n)}_{\leq P(A \Delta A_n) \rightarrow 0} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} (A).$$

$$\text{und } P(A_n) = P(A \cap A_n) + \underbrace{P(A_n \setminus A)}_{\leq P(A \Delta A_n) \rightarrow 0} \rightarrow P(A)$$

$$\Rightarrow P(A \cap A) = P(A) = P(A)P(A)$$

□

3.21 Beispiel.

$$\text{Erinnerung: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} < \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n} \text{ wobei } \{X_i\} \text{ iid sind, } P(X_1 = \pm 1) = \frac{1}{2}$$

$$A = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n} \text{ konvergiert} \right\} \in \mathcal{T} \Rightarrow P(A) \in \{0, 1\}$$

3.22 Beispiel. $\{X_i\}$ unabhängig, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$

$$\Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \text{ und } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \text{ sind f. s. Konst. mit Werten in } [-\infty, \infty].$$

$$Y := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \forall c \in \mathbb{R} \text{ gilt } \{Y \leq c\} \in \mathcal{T} \text{ Nach 0-1- Gesetz: } P(\{Y \leq c\}) \in \{0, 1\}. \text{ Wähle } b = \inf\{c : P(\{Y \leq c\}) = 1\} \in [-\infty, \infty] \Rightarrow P(Y = b) = 1.$$

Kapitel 4

Gesetz der Großen Zahlen

4.1 Konvergenz von Folgen

4.1 Definition. Seien X, X_1, X_2, \dots Zufallsvariablen auf dem W'Raum (Ω, \mathcal{F}, P)

1. $X_n \xrightarrow{\text{fast sicher}} X$, falls $P(\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$

2. $X_n \xrightarrow{P} X$ stochastisch (oder in W'keit), falls

$$P(|X_n - X| \geq \epsilon) \xrightarrow{\text{für } n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

3. ($X \in L^p$, falls $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$). Sind $x_n \in L^p$ und $x \in L^p$, dann sagt man : $X_n \xrightarrow{L^p} X$, falls $\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

4.2 Beispiel. $\Omega = [0, 1], \mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1]), P = \text{Lebesgue-Maß auf } [0, 1].$

$$\begin{aligned} A_1 &= [0, \frac{1}{2}] & A_2 &= [\frac{1}{2}, 1] \\ A_3 &= [0, \frac{1}{4}] & A_4 &= [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] & A_5 &= [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] & A_6 &= [\frac{3}{4}, 1] \\ A_7 &= [0, \frac{1}{8}] & A_8 &= [\frac{1}{8}, \frac{1}{4}] \\ &\vdots \end{aligned}$$

$X_n := \mathbf{1}_{A_n} \Rightarrow \mathbb{E}[|X_n|^p] = \mathbb{E}[|X_n|] = P(A_n) \rightarrow 0 \Rightarrow X_n$ konvergiert gegen 0 in L^p und in W'keit. Auf der anderen Seite: $\forall \omega \in \Omega \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n(\omega) \geq N :$

$$\begin{aligned} X_{n(\omega)}(\omega) &= 1 \\ \Rightarrow \{\omega : \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = 1\} &= \Omega \\ \Rightarrow P\left(\{\omega : \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = 1\}\right) &= 1 \\ \Rightarrow P(\{\omega : X_n(\omega) \rightarrow 0\}) &= 0 \end{aligned}$$

4.3 Lemma. Falls $x_n \xrightarrow{P} X$, so kann man eine Teilfolge X_{n_k} finden, so dass $X_{n_k} \xrightarrow{\text{fast sicher}} X$.

Beweis. $P(|X_n - X| > \epsilon) \rightarrow 0, \forall \epsilon > 0$. Wähle n_k so:
 $P(|X_{n_k} - X| > \epsilon) \leq \frac{1}{k^2}, \forall k \geq 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} P(\sup_{j \geq k} |X_{n_j} - X| > \epsilon) &= P(\bigcup_{i=k}^{\infty} \{|X_{n_j} - X| > \epsilon\}) \leq \sum_{j=k}^{\infty} P(|X_{n_j} - X| > \epsilon) \\ &\leq \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{1}{k-1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$Y_k := \sup_{j \geq k} |X_{n_j} - X|, Y_k \xrightarrow[k \rightarrow 0]{P} 0 \Rightarrow Y_k \xrightarrow{\text{fast sicher}} 0$$

(Dies folgt aus der Eigenschaft: Falls $X_n \xrightarrow{P} X$ und $\{X_n\}$ ist monoton, dann konvergiert $X_n \xrightarrow{\text{fast sicher}} X$) (Übung!) \square

4.4 Satz. Seien $0 < p_1 < p_2$. Dann gilt:

$$1) X_n \xrightarrow{L^{p_2}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^{p_1}} X$$

$$2) |X_n| \leq Y \forall n \geq 1 \text{ und } Y \in L^p. \text{ Dann gilt: } X_n \xrightarrow{P} 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^p} 0$$

$$\text{Beweis. } 1) \text{ Jensen-Ungl.: } \mathbb{E}[|X_n - X|^{p_1}] \leq \left(\mathbb{E}[|X_n - X|^{p_2}] \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \rightarrow 0$$

2)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_n|^p] &= \int_{\{|X_n| \leq \epsilon\}} |X_n|^p dP + \int_{\{|X_n| > \epsilon\}} |X_n|^p dP \\ &\leq \epsilon^p P(|X_n| \leq \epsilon) + \int_{\{|X_n| > \epsilon\}} |Y|^p dP \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[Y^p] < \infty \text{ und } P(|X_n| > \epsilon) \rightarrow 0 \Rightarrow \int_{\{|X_n| > \epsilon\}} |Y|^p dP \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n|^p] < \epsilon^p \forall \epsilon > 0 \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n|^p] = 0 \Rightarrow \mathbb{E}[|X_n|^p] \rightarrow 0$$

\square

4.5 Definition. Die Folge $\{X_n\}$ heißt gleichmäßig integrierbar, falls

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[|X_n| \mathbf{1}_{\{|X_n| \geq n\}}] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Für eine gleichmäßig integrierbare Folge $\{X_n\}$ gilt: $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[|X_n|] \leq c < \infty$

4.6 Satz. Ist $\{X_n\}$ gleichmäßig integrierbar, so gilt: $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^1} X$.

Beweis. Zuerst zeigen wir, dass $X \in L^1$. Für alle $N > 0$ und $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\min\{|X|, N\}] &= \mathbb{E}[\min\{|X|, N\} \mathbf{1}_{\{|X_n - X| \leq \epsilon\}}] \\ &\quad + \underbrace{\mathbb{E}[\min\{|X|, N\} \mathbf{1}_{\{|X_n - X| > \epsilon\}}]}_{NP(|X_n - X| > \epsilon) \rightarrow 0} \\ \Rightarrow \mathbb{E}[\min\{|X|, N\}] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\min\{|X|, N\} \mathbf{1}_{\{|X_n - X| \leq \epsilon\}}] \\ \mathbb{E}[\min\{|X|, N\} \mathbf{1}_{\{|X_n - X| \leq \epsilon\}}] &\leq \mathbb{E}[\min\{|X_n| + \epsilon, N\}] \leq \mathbb{E}[|X_n|] + \epsilon \\ &\leq \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[|X_n|] + \epsilon \leq c + \epsilon \\ \Rightarrow \mathbb{E}[|X|] &\leq c + \epsilon \quad \forall \epsilon > 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X_m - X|] &= \mathbb{E}[|X_m - X| \mathbf{1}_{\{|X_n - X| \leq \epsilon\}}] \\ &\quad + \mathbb{E}[|X_m - X| \mathbf{1}_{\{|X_n - X| \in (\epsilon, N]\}}] + \mathbb{E}[|X_m - X| \mathbf{1}_{\{|X_n - X| > N\}}] \\ &=: E_1 + E_2 + E_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_1 &\leq \epsilon P(|X_n - X| \leq \epsilon) \leq \epsilon \\ E_2 &\leq NP(|X_n - X| > \epsilon) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty\end{aligned}$$

Als nächstes: $\{X_n\}$ gleichmäßig integrierbar $\Rightarrow \{X_n - X\}$ glm. integrierbar.

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[|X_n - X| \mathbf{1}_{\{|X_n - X| > N\}}] = 0$$

$$\Rightarrow E_3 \leq \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[|X_n - X| \mathbf{1}_{\{|X_n - X| > N\}}] \rightarrow 0 \text{ für } N \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n - X|] \leq \epsilon + 0 + \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[|X_n - X| \mathbf{1}_{\{|X_n - X| > N\}}] \quad \square$$

4.7 Korollar. $X_n \xrightarrow{P} X$ & $\mathbb{E}[|X_n|^{p+\alpha}] \leq c \quad \forall n \geq 1$ und ein $\alpha \geq 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^p} X$

Beweis. Übung \square

4.2 Schwaches Gesetz der großen Zahlen

Seien X_1, X_2, \dots Zufallsvariablen auf einem W-Raum (Ω, \mathcal{F}, P) . Sei $S_n := \sum_{i=1}^n X_i, n \geq 1$

4.8 Definition. Man sagt, dass $\{X_i\}$ genügt dem schwachen Gesetz der großen Zahlen, falls $\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} \xrightarrow{P} 0$

4.9 Satz. Seien $\{X_i\}$ unkorreliert ($\mathbb{E}[X_i X_j] = \mathbb{E}[X_i] \mathbb{E}[X_j]$ mit $\text{Var}[X_i] \leq c < \infty$ für alle $i \geq 1$). Dann genügt $\{X_i\}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen.

Beweis. $\text{Var}[S_n] \stackrel{\{X_i\} \text{ unko.}}{=} \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i] \leq c_n \forall n \geq 1$

$$P\left(\left|\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n}\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[\left|\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n}\right|^2\right]}{\epsilon^2} = \frac{\text{Var}[1] S_n}{n^2 \epsilon^2} \leq \frac{nc}{n^2 \epsilon^2} = \frac{c}{n \epsilon^2} \rightarrow 0$$

□

4.10 Korollar. Sind $\{X_i\}$, zusätzlich zur Bedingung im Satz, identisch verteilt, so gilt:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}[X_i].$$

4.11 Satz. Seien $\{X_i\}$ unabhängig, identisch verteilt und: $nP(|X_1| > n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Dann gilt:

$$\frac{S_n}{n} - \underbrace{\mathbb{E}[X_1 \mathbb{1}_{\{|X_i| \leq n\}}]}_{=: \mu_n} \xrightarrow{P} 0.$$

Beweis. $Y_i := X_i \mathbb{1}_{\{|X_i| \leq n\}}, i \geq 1$. $\{X_i\}$ sind unabhängig, identisch verteilt. Setze $S'_n = \sum_{i=1}^n Y_i$.

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu_n\right| > \epsilon\right) &= P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu_n\right| > \epsilon, S_n = S'_n\right) \\ &\quad + P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu_n\right| > \epsilon, S_n \neq S'_n\right) \\ &\leq P\left(\left|\frac{S'_n}{n} - \mu_n\right| > \epsilon\right) + P(S_n \neq S'_n) \end{aligned}$$

Ferner, $\{S_n \neq S'_n\} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \{X_i \neq Y_i\}$.

$$P(S_n \neq S'_n) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^n \{X_i \neq Y_i\}\right) \leq nP(X_i \neq Y_i) = nP(|X_i| > n) \rightarrow 0$$

Chebyshev-Ungleichung: $P\left(\left|\frac{S'_n}{n} - \mu_n\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\text{Var}[1] S'_n}{n^2 \epsilon^2} = \frac{\text{Var}[1] Y_1}{n \epsilon^2} \leq \frac{\mathbb{E}[Y_1^2]}{n \epsilon^2}$

Aus der Übung:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_1^2] &= 2 \int_0^\infty x P(|Y_i| > x) dx \stackrel{P(|X_i| > x) = 0 \ \forall x \geq n}{\leq} 2 \int_0^n x P(|X_1| > x) dx \\
&= 2 \int_0^{\sqrt{n}} x P(|X_1| > x) dx + 2 \int_{\sqrt{n}}^n x P(|X_1| > x) dx \\
&\leq 2 \sup_{x \geq 0} (x P(|X_1| > x)) \cdot \sqrt{n} + 2 \underbrace{\sup_{x > \sqrt{n}} x P(|X_1| > x) \cdot n}_{=: \rho_n} \\
&= 2\sqrt{n} \cdot \sup_{x > 0} (x P(|X_i| > x)) + 2n\rho_n \\
&\Rightarrow \frac{\mathbb{E}[Y_1^2]}{n} \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \underbrace{\sup_{x > 0} (x P(|X_1| > x))}_{\leq c < \infty} + 2 \underbrace{\rho_n}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\
&\Rightarrow P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu_n\right| \geq \epsilon\right) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

□

4.12 Korollar. Ist $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$, so gilt $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}[X_1]$.

Beweis. $\mu_n \rightarrow \mathbb{E}[X_i]$ und $\mathbb{E}[|X_i|] < \infty \Rightarrow nP(|X_1| > n) \rightarrow 0$

$$\left(\mathbb{E}[|X_i|^p] < \infty \Rightarrow x^p P(|X_i| > x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0\right)$$

□

4.13 Beispiel. Seien $\{X_i\}$ unabhängig, identisch verteilt mit

$$P(X_1 > x) = \frac{e}{2x \log x}, \quad x > l$$

$$P(X_1 < x) = \frac{e}{2|x| |\log x|}, \quad x < -l$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[|X_1|] = \int_0^\infty P(|X_i| > x) dx = \int_0^\infty \frac{e}{x \ln x} dx = \infty$$

$$\mu_n := 0 \text{ und } nP(|X_i| > n) = n \frac{e}{n \ln n} = \frac{e}{\ln n} \rightarrow 0 \stackrel{\text{Satz 4.11}}{\Rightarrow} \frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} 0$$

Seien $\{X_i\}$ iid mit der Lebesgue-Dichte $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$

$$\Rightarrow P(|x_i| > n) = \int_n^\infty \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx \sim \frac{2}{\pi n} \text{ für } n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow nP(|X_i| > n) \rightarrow \frac{2}{\pi} \neq 0$$

In diesem Fall kann man zeigen, dass $\frac{S_n}{n}$ die gleiche Dichte hat.

4.14 *Bemerkung.* Man kann die Aussage von dem Satz 4.11 umkehren: Seien $\{X_i\}$ iid. Dann gilt: $\exists\{a_n\} : \frac{S_n}{n} - a_n \xrightarrow{P} 0 \Rightarrow nP(|X_1| > n) \rightarrow 0$
(Feller Introduction to ... Probability theory?)

4.15 *Bemerkung.* Im Beweis von Satz 4.11 $\mathbb{E}[X_i Y_j] = \mathbb{E}[X_i] \mathbb{E}[Y_j]$
 $Y_i = X_i \mathbb{1}_{\{|X_i| \leq n\}}$ Satz 4.11 ist richtig unter der Annahme, dass $\{X_i\}$ paarweise unabhängig sind.

4.3 Starke Gesetze der großen Zahlen

$\frac{S_n}{n} - \mu_n \xrightarrow{P} 0 \Rightarrow \exists\{n_k\} : \frac{S_{n_k}}{n_k} - \mu_{n_k} \xrightarrow{\text{f.s.}} 0$. Kann man sagen, dass die ganze Folge fast sicher konvergiert?

4.16 Satz (Gesetz der großen Zahlen von Etemadi:). *Es seien $\{X_i\}$ paarweise unabhängig, identisch verteilt mit $\mathbb{E}[|X_i|] < \infty$. Dann genügt $\{X_i\}$ dem starken Gesetz der großen Zahlen, das heißt:*

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} \xrightarrow{\text{fast sicher}} 0 \quad \left(\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{fast sicher}} \mathbb{E}[X_i] \right)$$

4.17 Lemma. Für $n \geq 1$ definiere $Y_n := X_n \mathbb{1}_{\{|X_n| \leq n\}}$ und $S'_n = \sum_{i=1}^n Y_i$.
Falls $\frac{S'_n}{n} \xrightarrow{\text{fast sicher}} \mathbb{E}[X_1]$, so genügt $\{X_i\}$ dem starken Gesetz der großen Zahlen.

Beweis. $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| > n) \leq \mathbb{E}[|X_1|] = \int_0^{\infty} P(|X_1| > x) dx$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(Y_n \neq X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| > n) \leq \mathbb{E}[|X_1|] < \infty$$

Borel-Cantelli: $P(Y_n \neq X_n \text{ für unendlich viele } n \geq 1) = 0$. Das heißt, dass $\exists A$ mit $P(A) = 1$: $\forall \omega \in A \exists n_0(\omega)$ mit $Y_n(\omega) = X_n(\omega) \forall n \geq n_0$
 $\exists B$ mit $P(B) = 1$: $\frac{S'_n(\omega)}{n} \rightarrow \mathbb{E}[X_i] \forall \omega \in B \Rightarrow \forall \omega \in A \cap B$ gilt:

$$\frac{S_n(\omega)}{n} = \frac{S'_n(\omega)}{n} + \frac{S_n(\omega) - S'_n(\omega)}{n} = \underbrace{\frac{S'_n(\omega)}{n}}_{\rightarrow \mathbb{E}[X_i]} + \underbrace{\frac{S_{n_0}(\omega) - S'_{n_0}(\omega)}{n}}_{\rightarrow 0}$$

$\Rightarrow \frac{S_n}{n} \rightarrow \mathbb{E}[X_1]$ auf $A \cap B$ □

4.18 Lemma. Es gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[Y_n^2]}{n^2} \leq 4\mathbb{E}[|X_1|]$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_n^2] &= 2 \int_0^\infty x P(|Y_n| > x) dx \leq 2 \int_0^n x P(|X_1| > x) dx \\
\sum_{n=1}^\infty \frac{\mathbb{E}[Y_n^2]}{n^2} &\leq 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \int_0^n x P(|X_1| > x) dx \\
&\stackrel{Fubini}{=} 2 \int_0^\infty x P(|X_1| > x) \left(\sum_{n \geq x} \frac{1}{n^2} \right) dx \\
\sum_{n \geq m} \frac{1}{n^2} &\leq \frac{1}{m^2} + \sum_{n=m+1}^\infty \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{m^2} + \sum_{n=m+1}^\infty \int_{n-1}^n \frac{du}{u^2} = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{m} \\
\Rightarrow \sum_{n \geq X} \frac{1}{n^2} &\leq \frac{2}{X} \Rightarrow \sum \frac{\mathbb{E}[Y_n^2]}{n^2} \leq 4 \underbrace{\int_0^\infty P(|X_1| > x) dx}_{=\mathbb{E}[|X_1|]}
\end{aligned}$$

□

Beweis. $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{f. s.}} \mathbb{E}[X_i] \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^n X_i^+}{n} \xrightarrow{\text{f. s.}} \mathbb{E}[X_1^+]$ und $\frac{\sum_{i=1}^n X_i^-}{n} \xrightarrow{\text{f. s.}} \mathbb{E}[X_1^-]$
 \Rightarrow Wir können annehmen, dass $X_i \geq 0$. Wähle $\epsilon > 0$, setze $\alpha = 1 + \epsilon$.
 Definiere nun: $n_k = \lfloor \alpha^k \rfloor$

$$\Rightarrow \sum_{k: n_k \geq m} n_k^{-2} \leq 4 \sum_{k: n_k \geq m} \alpha^{-2k} \leq 4(1 - \alpha^{-2})^{-1} m^{-2}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^\infty P\left(\left|\frac{S'_{n_k} - \mathbb{E}[S'_{n_k}]}{n_k}\right| > \delta\right) &\stackrel{Chebyshev}{\leq} \delta^{-2} \sum_{k=1}^\infty \frac{\text{Var}[S'_{n_k}]}{n_k^2} = \delta^{-2} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{n_k^2} \sum_{m=1}^{n_k} \text{Var}[Y_m] \\
&= \delta^{-2} \sum_{m=1}^\infty \text{Var}[Y_m] \sum_{k: n_k \geq m} \frac{1}{n_k^2} \\
&\leq \delta^{-2} 4(1 - \alpha^{-2})^{-1} \sum_{m=1}^\infty \text{Var}[Y_m] \frac{1}{m^2}
\end{aligned}$$

Nach Lemma 4.18

$$\sum_{k=1}^\infty P\left(\left|\frac{S'_{n_k} - \mathbb{E}[S'_{n_k}]}{n_k}\right| > \delta\right) \leq 16\delta^{-2}(1 - \alpha^{-2})^{-1} \mathbb{E}[|X_1|] < \infty$$

$$^1 n_k \geq \frac{\alpha^k}{2}$$

Da δ beliebig ist, liefert uns das Borel-Cantelli Lemma die Konvergenz:

$$\frac{S'_{n_k} - \mathbb{E}[S'_{n_k}]}{n_k} \xrightarrow{\text{fast sicher}} 0$$

Ferner, aus der monotonen Konvergenz folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_j] &= \mathbb{E}[X_1 \mathbf{1}_{\{X_1 \leq j\}}] \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_1] \\ \Rightarrow \frac{\mathbb{E}[S'_{n_k}]}{n_k} &= \frac{\sum_{i=1}^{n_k} i = 1 \mathbb{E}[Y_i]}{n_k} \rightarrow \mathbb{E}[X_1] \Rightarrow \frac{S'_{n_k}}{n_k} \xrightarrow{\text{fast sicher}} \mathbb{E}[X_1] \end{aligned}$$

Aus der Definition von n_k folgt, dass $\exists n_0 : n_{k+1} \leq (1 + 2\epsilon)n_k \quad \forall n \geq n_0$.

Denn für $l \in [n_k, n_{k+1}]$ gelten die Abschätzungen: $\frac{S'_l}{l} \geq \frac{S'_{n_k}}{n_{l+1}} \geq \frac{S'_{n_k}}{(1+2\epsilon)n_k}$ und $\frac{S'_l}{l} \leq \frac{S'_{n_{k+1}}}{n_k} \leq (1 + 2\epsilon) \frac{S'_{n_{k+1}}}{n_{k+1}}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \limsup_{l \rightarrow \infty} \left| \frac{S'_l}{l} - \mathbb{E}[X_1] \right| &\leq \underbrace{\limsup_{n_k \rightarrow \infty} \left| \frac{S'_{n_k}}{n_k} - \mathbb{E}[X_1] \right|}_{=0 \text{ fast sicher}} + 2\epsilon \underbrace{\limsup_{n_k \rightarrow \infty} \frac{S'_{n_k}}{n_k}}_{=\mathbb{E}[X_1]} \\ \Rightarrow \limsup_{l \rightarrow \infty} \left| \frac{S'_l}{l} - \mathbb{E}[X_1] \right| &\leq 2\epsilon \mathbb{E}[X_1] \end{aligned}$$

Die ϵ beliebig klein sein darf, folgt $\limsup_{l \rightarrow \infty} \left| \frac{S'_l}{l} - \mathbb{E}[X_1] \right| = 0$ □

4.19 *Beispiel* (Gesetz der normalen Zahlen, Borel 1908).

$$\Omega = [0, 1], \mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1]), P = \text{Lebesgue-Maß auf } [0, 1]$$

$$\omega \in \Omega : \omega = 0, \xi_1(\omega) \xi_2(\omega) \dots \dots \xi_i(\omega) \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

$$E = \left\{ \frac{m}{10^n}, n \geq 1, m \in \{1, 2, \dots, 10^n\} \right\}, P(E) = 0$$

$$\nu_k^{(n)}(\omega) = |\{i \in \{1, 2, \dots, n\} : \xi_i(\omega) = k\}| \quad k = 0, 1, \dots, 9$$

Die Zahl ω heißt normal, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_k^{(n)}(\omega)}{n} \rightarrow \frac{1}{10} \forall k \in \{0, 1, \dots, 9\}$

Gesetz der normalen Zahlen: $P(\{\omega : \omega \text{ normal}\}) = 1$ Für den Beweis:

- $\{\xi_i\}_{i \leq 1}$ unabhängige ZVen
- $P(\xi_i = k) = \frac{1}{10}, k \in \{0, 1, \dots, 9\}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow X_n^{(k)} = \mathbb{1}_{\{\xi_n=k\}}, n \geq 1, k \in \{0, \dots, 9\} \Rightarrow \{X_n^{(k)}\}_{n \geq 1} - \text{iid} \\
&\Rightarrow \frac{\nu_k^{(k)}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^{(k)}}{n} \xrightarrow{\text{fast sicher}} \mathbb{E} \left[X_i^{(k)} \right] = \frac{1}{10} \quad \forall k \in \{0, \dots, 9\} \\
&\Rightarrow \exists A_k \text{ mit } P(A_k) = 1 \text{ so dass } \frac{\nu_k^{(k)}}{n} \rightarrow \frac{1}{10} \quad \forall \omega \in A_k \\
&\Rightarrow \frac{\nu_k^{(k)(\omega)}}{n} \rightarrow \frac{1}{10} \quad \forall k \forall \omega \in \bigcap_{j=0}^9 A_j \Rightarrow P \left(\bigcap_{j=0}^9 A_j \right) = 1.
\end{aligned}$$

Bemerkung (Beispiel). X_i iid mit $P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i}{3^i}$ hat singuläre Verteilung die mit der Cantor-Menge verbunden ist.

4.20 Satz. Seien $\{X_i\}$ unabhängige, identisch verteilte ZVen. Falls $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{f. s.} a \in \mathbb{R}$, dann ist X_i integrierbar und $\mathbb{E}[X_1] = a$.

Beweis. $\frac{X_n}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n} \frac{S_{n-1}}{n-1} \xrightarrow{f. s.} 0. \Rightarrow P(|\frac{X_n}{n}| > 1 \text{ für } \infty \text{ viele } n) = 0.$

Nach Borel-Cantelli-Lemma, $\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\frac{X_n}{n}\right| \geq 1\right) = 0 < \infty$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| \geq n) < \infty \Rightarrow \mathbb{E}[|X_1|] < \infty$ Nach Etemadi's Gesetz: $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{f. s.} \mathbb{E}[X_1] \Rightarrow \mathbb{E}[X_1] = a$ □

4.4 Zufällige Reihen

$\{X_i\}$ unabhängige ZVen, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ Nach 0-1-Gesetz:

$A = \{\omega : S_n(\omega) \text{ konvergiert}\}$ hat Wahrscheinlichkeit 0 oder 1

4.21 Satz. Seien $\{X_i\}$ unabhängig mit $\mathbb{E}[X_i] = 0$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_i^2] < \infty$. Dann konvergiert S_n in W'keit. $\left(P(|S_n - S| > \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, S = \sum_{i=1}^{\infty} X_i\right)$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(S_{n+m} - S_n)^2] &= \text{Var}[S_{n+m} - S_n] \\
&= \text{Var}\left[\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i\right] = \sum_{i=n+1}^{n+m} \text{Var}[X_i] \\
&= \sum_{i=n+1}^{n+m} \mathbb{E}[X_i^2]
\end{aligned}$$

Wegen $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_i^2] < \infty$, ist Folge S_n eine Cauchy-Folge in L^2 . Und L^2 ist vollständig, d.h. $\exists S \in L^2 : S_n \rightarrow S$ in L^2 . Aber L^2 -Konvergenz impliziert Konvergenz in W'keit. □

4.22 Satz (Levy). Sind $\{X_1\}$ unabhängig, so gilt:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} X_i \text{ konvergiert fast sicher}}_{S_n \rightarrow S \text{ fast sicher}} \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} X_i \text{ konvergiert in Wahrscheinlichkeit}}_{S_n \xrightarrow{P} S}$$

Beweis. “ \Leftarrow “ Es genügt zu zeigen, dass $P(\sup_{i \geq n} |S_i - S_n| > \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
Zuerst merken wir, dass:

$$P\left(\sup_{i \geq n} |S_i - S| > \epsilon\right) \leq P\left(\sup_{i \geq n} |S_i - S| > \frac{\epsilon}{2}\right) + \underbrace{P\left(|S_n - S| > \frac{\epsilon}{2}\right)}_{\rightarrow 0}$$

$$P(\sup_{i \geq n} |S_i - S_n| > 2\delta) = \sum_{i=n}^{\infty} P(B_i), \text{ wobei}$$

$$B_i = \{|S_j - S_n| \leq 2\delta \forall j \in [n, i-1], |S_i - S_n| > 2\delta\}$$

Auf B_i gilt: $|S_i - S_n| > 2\delta$

$$\Rightarrow |S - S_n| = |(S - S_i) - (S_n - S_i)| \geq |S_n - S_i| - |S - S_i| > 2\delta - |S - S_i|$$

$$\Rightarrow B_i \cap \underbrace{\{|S - S_i| \leq \delta\}}_{\in \sigma X_{i+1}, X_{i+2}, \dots} \subseteq B_i \cap \{|S - S_n| > \delta\}$$

$$\Rightarrow P(B_i) P(|S - S_i| < \delta) \leq P(B_i \cap \{|S - S_n| > \delta\})$$

$$\Rightarrow P(B_i) \leq \frac{P(B_i \cap \{|S - S_n| > \delta\})}{P(|S - S_i| \leq \delta)}$$

$$\Rightarrow P\left(\sup_{i \geq n} |S_i - S_n| > 2\delta\right) = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{P(B_i \cap \{|S - S_n| > \delta\})}{P(|S - S_n| \leq \delta)}$$

$$\leq \frac{1}{\inf_{i \geq n} P(|S - S_i| \leq \delta)} \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \cap \{|S - S_n| > \delta\}}_{P\left(\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} B_i\right) \cap \{|S - S_n| > \delta\}\right)} \leq P(|S - S_n| > \delta)$$

$$\Rightarrow P(\sup_{i \geq n} |S_i - S_n| > 2\delta) \leq \frac{\overbrace{P(|S_n - S| > \delta)}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{1 - \sup_{i \geq n} P(|S_i - S| > \delta)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

4.23 Satz. Seien $\{X_i\}$ unabhängige ZVen, $X_i^{(c)} = X_i \mathbf{1}_{\{|X_i| \leq c\}}$. Konvergieren die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| < c) < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[\left| X_n^{(c)} \right| \right] < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var} \left[X_n^{(c)} \right] < \infty$ so konvergiert $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ fast sicher.

Beweis. $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > c)$ und Borel-Cantelli-Lemma gibt

$$P(|X_n| > c \text{ für unendlich viele } n \geq 1) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} X_i^{(c)} \text{ konvergiert} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} X_i$$

konvergiert. Also bleibt zu zeigen: $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var} \left[X_n^{(c)} \right] < \infty$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(X_n^{(c)} - \mathbb{E} \left[X_n^{(c)} \right] \right) \text{ konvergiert in W'keit (Satz 4.21).}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(X_n^{(c)} - \mathbb{E} \left[X_n^{(c)} \right] \right) \text{ konvergiert fast sicher. } \sum \mathbb{E} \left[X_n^{(c)} \right] \text{ konvergiert}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} X_n^{(c)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(X_n^{(c)} - \mathbb{E} \left[X_n^{(c)} \right] \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[X_n^{(c)} \right] \text{ konvergiert auch f. ü. } \quad \square$$

4.24 Bemerkung. Konvergiert $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ fast sicher so konvergieren

$$\sum P(|X_n| > c), \sum \mathbb{E} \left[X_n^{(c)} \right], \sum \text{Var} \left[X_n^{(c)} \right] \text{ für alle } c > 0.$$

4.25 Beispiel. $\{X_i\}$ iid mit $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$

$$\text{Frage: Konv. } \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i}{i^\alpha}?, \mathbb{E} \left[\frac{X_i}{i^\alpha} \right] = 0, \text{Var} \left[\frac{X_i}{i^\alpha} \right] = \frac{1}{i^{2\alpha}} \text{Var} [X_i] = \frac{\mathbb{E}[X_i^2]}{i^{2\alpha}} = \frac{1}{i^{2\alpha}}$$

$$\Rightarrow \text{Für } \alpha > \frac{1}{2} \text{ konvergiert die Reihe } \sum \text{Var} \left[\frac{X_i}{i^\alpha} \right]$$

$$\forall c > 1 \left(\frac{X_i}{i^\alpha} \right)^{(c)} = \frac{X_i}{i^\alpha} \xrightarrow{4.23} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i}{i^\alpha} \text{ konvergiert fast sicher } \forall \alpha > \frac{1}{2}$$

Angenommen $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i}{i^\alpha}$ konvergiert für ein $\alpha \leq \frac{1}{2}$, denn

$$\infty > \sum_{i=1}^{\infty} \text{Var} \left[\left(\frac{X_i}{i^\alpha} \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^{\infty} \text{Var} \left[\frac{X_i}{i^\alpha} \right] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{2\alpha}} = \infty$$

Falls $X_i = 1$, dann $\sum \frac{X_i}{i^\alpha}$ konvergiert $\Leftrightarrow \alpha > 1$. Falls $X_i = (-1)$, dann konvergiert $\sum \frac{X_i}{i^\alpha} \forall \alpha > 0$ weil $\frac{1}{i^\alpha} - \frac{1}{(i+1)^\alpha} \sim \frac{1}{i^{\alpha+1}}$

4.26 Satz. Seien $\{X_i\}$ unabhängig, identisch verteilt mit $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Dann gilt:

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{n}(\log n)^{\frac{1}{2}+\delta}} \xrightarrow{f.s.} 0 \quad \forall \delta > 0$$

Gesetz der großen Zahlen: $\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} \xrightarrow{f.s.} 0$. Informell:

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{n}(\log n)^{\frac{1}{2}+\delta}} \sim \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} = o\left(\frac{(\log n)^{\frac{1}{2}+\delta}}{\sqrt{n}}\right)$$

Beweis. $a_n = \sqrt{n}(\ln n)^{\frac{1}{2}+\delta}$, $n \geq 2$, $a_1 = 1$. Wir dürfen annehmen, dass $\mathbb{E}[X_1] = 0$. Es gilt:

- $\mathbb{E}\left[\frac{X_n}{a_n}\right] = 0 \quad \forall n \geq 1$

-

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_n}{a_n}\right)^2\right] &= \mathbb{E}[X_1^2] + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1+2\delta}} \mathbb{E}[X_1^2] \\ &= \mathbb{E}[X_1^2] \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1+2\delta}}\right) < \infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{a_n}$ konvergiert fast sicher. Die Behauptung des Satzes folgt aus dem

□

4.27 Lemma (Kroneckerlemma). Seien $a_n, x_n \in \mathbb{R}$. Falls $a_n \uparrow \infty$ und $\sum \frac{X_n}{a_n}$ konvergiert, so gilt $\frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^n x_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Kapitel 5

Schwache Konvergenz

5.1 Definition und Eigenschaften

5.1 Definition. Seien $\{P_n\}, P$ W'Maße auf (Ω, \mathcal{A}) . P_n konvergiert gegen P schwach ($P_n \Rightarrow P, P_n \xrightarrow{w} P$), falls

$$\int_{\mathbb{R}} f dP_n \rightarrow \int f dP \quad \forall f \in C_b(\mathbb{R})$$

Definition (Vereinbarung). Wir werden sagen, dass $\{X_n\}$ konvergiert schwach gegen ZV X , falls $P_{x_n} \Rightarrow P_x$. Dabei werden wir schreiben

$$X_n \Rightarrow X \quad \left(X_n \xrightarrow{w} X \right)$$

5.2 Satz (Portmanteu). Seien $\{P_i\}, P$ W'Maße auf (Ω, \mathcal{A}) . Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $P_n \Rightarrow P$

(ii) $\int f dP_n \rightarrow \int f dP \quad \forall f : \text{beschränkt und } \underline{\text{gleichmäßig stetig}}$

(iii) $\limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(F) \leq P(F) \quad \forall F \text{ abgeschlossen}$

(iv) $\liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(G) \geq P(G) \quad \forall G \text{ offen}$

(v) $P_n(A) \rightarrow P(A) \quad \forall A : P(\delta A) = 0$

Beweis. (iii) \Leftrightarrow (iv) F ist abgeschlossen $\Leftrightarrow F^c$ ist offen $P_n(F) = 1 - P_n(F^c)$, $P(F) = 1 - P(F^c)$. Dann gilt:

$$\limsup P_n(F) \leq P(F) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - P_n(F^c)) \leq 1 - P(F^c)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \liminf_{n \rightarrow \infty} P(F^c) \leq 1 - P(F^c) \Leftrightarrow P(F^c) \leq \liminf P(F^c)$$

(ii) \rightarrow (iii) Sei F eine abgeschlossene Menge. Lege ein $\delta > 0$ fest, und für jedes $\epsilon > 0$ definiere

$$G_\epsilon = \{x \in \mathbb{R} : \text{dist}(x, F) < \epsilon\}$$

Aus der Stetigkeit von oben von P folgt $P(G_\epsilon) \leq P(F) + \delta \forall \epsilon$ klein

genug. Setze $\phi(t) = \begin{cases} 1, & t < 0 \\ 1 - t, & t \in [0, 1] \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$

$$f_\epsilon(x) = \phi\left(\frac{1}{\epsilon} \text{dist}(x, F)\right) \text{ Eigenschaften von } f_\epsilon :$$

- f_ϵ ist gleichmäßig stetig und beschränkt.
- $f(x) = 1 \forall x \in F$
- $f(x) = 0 \forall x \in G_\epsilon^c$
- $f(x)_\epsilon \in [0, 1] \forall x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_n(F) &= \int_F f_\epsilon dP_n \leq \int_R f_\epsilon dP_n \xrightarrow{(ii)} \int_{\mathbb{R}} f_\epsilon dP = \int_{G_\epsilon} f_\epsilon dP \leq P(G_\epsilon) \\ \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(F) &\leq P(G_\epsilon) < P(F) + \delta \end{aligned}$$

(iii) \rightarrow (i) $f \in C_b(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists a = a(f)$ und $b(f): a \cdot f(x) + b \in [0, 1] \Rightarrow$.

Zuerst betrachten wir $f \in C_b(\mathbb{R})$ mit $f(x) \in [0, 1]$

$\forall k \in \mathbb{N}$ definiere die Mengen $F_i = \{x : f(x) \geq \frac{i}{k}\}, i = 0, \dots, k$. Jedes F_i ist abgeschlossen, $F_0 = \mathbb{R}, F_k = \emptyset$

$$\begin{aligned} l.s. &= \sum_{i=1}^k \left(\frac{i-1}{k}\right) P\left(\left\{x : f(x) \in \left[\frac{i+k}{k}, \frac{i}{k}\right]\right\}\right) \\ &\leq \int f dP \leq \sum_{i=1}^k \frac{i}{k} P\left(\left\{x : f(x) \in \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right]\right\}\right) = r.s. \\ l.s. &= \sum_{i=1}^k \frac{i-1}{k} P(F_{i-1} \setminus F_i) = \sum_{i=1}^k \frac{i-1}{k} (P(F_{i-1}) - P(F_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{k} P(F_i) - \sum_{i=1}^k \frac{i-1}{k} P(F_i) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k P(F_i) \\ r.s. &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{i+1}{k} P(F_i) - \sum_{i=1}^k \frac{i}{k} P(F_i) = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k P(F_i) \\ &\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k P(F_i) \leq \int f dP \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k P(F_i) \\ &\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k P_n(F_i) \leq \int f dP_n \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k P_n(F_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f dP_n &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k P_n(F_i) \right) \\
&\leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(F_i) \\
&\leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k P(F_i) \leq \frac{1}{k} + \int f dP
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \int f dP_n \leq \int f dP(*) \Rightarrow (*) \text{ ist für alle } f \in C_b(\mathbb{R}) \text{ erfüllt.} \\
&(*) \text{ zu } (-f) : \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f dP_n \geq \int f dP
\end{aligned}$$

(iii) \rightarrow (v) Sei A° das Innere und \overline{A} der Abschluss von A .

$$\begin{aligned}
P(\overline{A}) &\stackrel{(iii)}{\geq} \limsup_{n \rightarrow \infty} P((\overline{A})_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(A) \\
&\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(A) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(A^\circ) \stackrel{(iv)}{\geq} P(A^\circ)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Aber für } A: P(A^\circ) = 0 &\Rightarrow P(\overline{A}) = P(A) = P(A^\circ) \Rightarrow P(A) \geq \\
\limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(A) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(A) \geq P(A)
\end{aligned}$$

(v) \rightarrow (iii) Sei F eine abgeschlossene Menge. $\forall \delta > 0$ gilt:

$$\partial\{x : \text{dist}(x, F) < \delta\} \subseteq \{x : \text{dist}(x, F) = \delta\}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow R_\delta = \partial\{x : \text{dist}(x, F) \leq \delta\} \text{ sind paarweise disjunkt. } P \text{ ist W'Maß} \\
&\Rightarrow \exists \text{ nur abzählbar viele } \delta's \text{ mit } P(R_\delta) > 0 \Rightarrow \exists \delta_k \downarrow 0 : P(R_{\delta_k}) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Für jedes } k \geq 1 \text{ gilt: } \limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(F) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(F_k) \stackrel{(v)}{=} P(F_k) \text{ wobei} \\
&F_k = \{x : \text{dist}(x, F) \leq \delta_k\} \supseteq F.
\end{aligned}$$

$$F \text{ ist abgeschlossen} \Rightarrow F_k \downarrow F \Rightarrow P(F_k) \downarrow P(F)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(F) \leq P(F) \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(F) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} P(F_k) = P(F)$$

□

5.3 Satz. $\{P_n\}$, P W'Maße auf (Ω, \mathcal{F}) mit Verteilungsfunktionen $\{F_n\}$, F ($F_n(x) = P_n((-\infty, x])$). Dann gilt: $P_n \xrightarrow{w} P \Leftrightarrow F_n(x) \rightarrow F(x)$ für jedes $x \in \{y : F \text{ ist stetig an der Stelle } y\}$.

Beweis. " \Rightarrow " Sei x eine Stetigkeitsstelle von F . Dann $P(\{x\}) = 0 \Rightarrow A_x := (-\infty, x], P(\partial A_x) = P(\{x\}) = 0$ Nach Satz 5.2(v), $F_n(x) = P_n(A_x) \rightarrow P(A_x) = F(x)$

“ \Leftarrow “ Seien $\{a_k\}, \{b_k\}$ Stetigkeitsstellen von F mit $a_k \downarrow a$ und $b_k \uparrow b$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} P((a_k, b_k]) &= F(b_k) - F(a_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(F_n(a_k) - F_n(b_k))}_{P_n((a_k, b_k])} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} P_n((a_k, b_k]) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P_n((a, b]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dazu: } (a_k, b_k] \uparrow (a, b) &\Rightarrow \lim P((a_k, b_k]) = P((a, b)) \\ &\Rightarrow P((a, b)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P_n((a, b)) \end{aligned}$$

Sei G eine offene Menge $\subseteq \mathbb{R}$. Dann $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, I_k sind offene Intervalle.

$$\begin{aligned} P(G) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(I_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(I_k) \\ &\stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} P_n(I_k) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(G). \end{aligned}$$

Nach Satz 5.2 (iv) $P_n \xrightarrow{w} P$

□

Bemerkung. Zum Fatoulemma

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu$$

Bei uns:

$\Omega = \mathbb{N}$, $\mu =$ Zählmaß, $f_n : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty) : f_n(k) = P_n(k), k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(k) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} f_n(k)$$

5.4 Beispiel. Seien X_1, X_2, \dots iid mit $\text{Exp}(1)$ Verteilung, d.h. Dichte von X_1 ist $e^{-x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$. Definiere $Y_n := \max_{k \leq n} X_k$. Wir wollen eine Folge $\{a_n\}$ bestimmen, so dass $Y_n - a_n$ schwach konvergiert.

$$F_{Y_n - a_n}(x) = P(Y_n - a_n \leq x) = P(Y_n \leq x + a_n) = P(\max_{k \leq n} X_k \leq x + a_n)$$

$$= P\left(\bigcap_{k=1}^n \{X_k \leq x + a_n\}\right) = (P(X_1 \leq x + a_n))^n$$

$$= \begin{cases} 0, & x \leq -a_n \\ (1 - e^{-x-a_n})^n, & x > -a_n \end{cases}$$

$$a_n = \ln n \Rightarrow (1 - e^{-x-a_n})^n = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n \rightarrow e^{-e^{-x}}$$

$$\Rightarrow F_{Y_n - a_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-e^{-x}} \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ ist eine Verteilungsfunktion}$$

5.5 Satz. Sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, $D_h = \{x: h \text{ ist stetig an der Stelle } x\}$. Falls $X_n \xrightarrow{w} X$ und $P(X \in D_h) = 0$, so $h(X_n) \xrightarrow{w} h(X)$.

Beweis. Sei ν_n Verteilung von $h(X_n)$. Nach Satz 5.2 genügt es zu zeigen, dass $\limsup \nu_n(F) \leq \nu(F)$, $\forall F$ abgeschlossen. $\Leftrightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(h^{-1}(F)) \leq P(h^{-1}(F))$ Es gilt:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(h^{-1}(F)) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(\overline{h^{-1}(F)}) \leq 2 \leq P(\overline{h^{-1}(F)})$$

Sei $\{x_n\} \subseteq h^{-1}(F) : x_n \rightarrow x$. $x_n \in h^{-1}(F) \Rightarrow h(x_n) \in F$. Ist h stetig an der Stelle x , so $h(x_n) \rightarrow h(x) \Rightarrow x \in h^{-1}(F) \Rightarrow \overline{h^{-1}(F)} \subseteq h^{-1}(F) \cup D_h \Rightarrow P(\overline{h^{-1}(F)}) = P(h^{-1}(F)) \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(h^{-1}(F)) \leq P(h^{-1}(F))$. \square

5.6 Satz. Sei $(X_n)_{n \geq 1}$ Folge von Zufallsvariablen. Dann gilt:

a) $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{w} X$

b) $X_n \xrightarrow{w} c \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} c$ (Alle X_i leben auf dem gleichen Raum)

c) b) ist falsch ohne die Annahme, dass der Limes eine Konstante ist.

Beweis. Übung \square

5.2 Schwache Konvergenz: hinreichende Bedingungen

$X_n \xrightarrow{w} X$. Um das zu zeigen müssen wir beweisen, dass

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \rightarrow \mathbb{E}[f(X)] \quad \forall f \in C_b$$

$\mathcal{G} := \{G: \text{rechtsstetig, monoton wachsend, } G(-\infty) \geq 0, G(\infty) \leq 1\}$. Wir schreiben $G_n \rightarrow G$, falls $G_n(x) \rightarrow G(x)$ für jede Stetigkeitsstelle von G .

5.7 Satz (Auswahlsatz von Helly). Sei $\{G_n\} \subseteq \mathcal{G}$. Dann existiert eine Teilfolge $\{G_{n_k}\}$ und ein $G \in \mathcal{G}$ so dass $G_{n_k} \Rightarrow G$

5.8 Definition. Eine Folge von Verteilungen $\{P_n\}$ heißt straff, falls $\forall \epsilon > 0 \exists M > 0 : P_n([-M, M]) > 1 - \epsilon \forall n \geq 1$

5.9 Satz (Satz von Prokhorov). Eine Folge $\{P_n\}$ ist relativ kompakt genau dann, wenn $\{P_n\}$ straff ist.

²schwache Konvergenz von P_n

Beweis. " \Leftarrow " $\{P_n\}$ ist straff. Nach Satz 5.7, $\exists G \in \mathcal{G}$ und $\{P_{n_k}\}$ so dass $F_{n_k} \Rightarrow G$. Wir müssen zeigen, dass G eine Verteilungsfunktion ist. $\forall \epsilon > 0 \exists a, b$ Stetigkeitsstellen von G , so dass $F_{n_k}(b) - F_{n_k}(a) \geq 1 - \epsilon \forall n_k$
 $G(b) - G(a) = \lim_{n_k \rightarrow \infty} (F_{n_k}(b) - F_{n_k}(a)) \geq 1 - \epsilon \Rightarrow G(b) - G(a) \geq 1 - \epsilon$. Aber ϵ ist beliebig $\Rightarrow G(\infty) - G(-\infty) \geq 1$, $G(\infty) \leq 1$ und $G(-\infty) \geq 0 \Rightarrow G(\infty) = 1, G(-\infty) = 0$

" \Rightarrow " $\{P_n\}$ relativ kompakt. Wir nehmen an, dass $\{P_n\}$ nicht straff ist.
 $\exists \epsilon > 0 \forall M > 0 \exists n_M : P_{n_M}([-M, M]) < 1 - \epsilon$
Für $M \in \mathbb{N}$ definiere $\tilde{P}_M = P_{n_M}$. $\{\tilde{P}_n\} \subseteq \{P_n\}$ und $\{P_n\}$ ist relativ kompakt $\Rightarrow \exists \{M_k\} : \tilde{P}_{M_k} \Rightarrow P \left(\tilde{F}_{M+k} \Rightarrow F \right) \exists a, b$ Stetigkeitsstellen von F mit $F(b) - F(a) > 1 - \epsilon$:

$$\tilde{F}_{M_k}(b) - \tilde{F}_{M_k}(a) \rightarrow F(b) - F(a) > 1 - \epsilon$$

$$\tilde{F}_{M_k}(b) - \tilde{F}_{M_k}(a) = \tilde{P}_{M_k}((a, b]) \leq {}^3 \tilde{P}_{M_k}([-M, M])$$

$$\Rightarrow \tilde{P}_{M_k}([-M_k, M_k]) \geq 1 - \epsilon \text{ Widerspruch zur Annahme}$$

□

5.10 Satz. Falls $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[|X_n|^p] < \infty$ für ein $p > 0$, so ist $\{P_{X_n}\}$ straff.

Beweis.

$$\sup_{n \geq 1} P(|X_n| > M) \leq \sup_{n \geq 1} \frac{\mathbb{E}[|X_n|^p]}{M^p} = \frac{C}{M^p}$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists M_\epsilon : \sup_{n \geq 1} P(|X_n| > M) \leq \epsilon \forall M \geq M_\epsilon$$

□

5.11 Definition. Eine Klasse $K \subseteq C_b(\mathbb{R})$ heißt trennende Familie, falls:

$$\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[f(Y)], \forall f \in K \Rightarrow P_X = P_Y$$

5.12 Satz. Sei K eine trennende Familie. Die Folge $\{P_n\}$ konvergiert schwach genau dann, wenn:

(1) $\{P_n\}$ ist straff

(2) $\forall f \in K \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f dP_n$

Beweis. " \Rightarrow " Klar

³für alle M_k groß genug

“ \Leftarrow “ $\{P_n\}$ ist straff $\stackrel{\text{Prokhorov}}{\Rightarrow} \exists \{P_{n_k}\}$ und P sodass $P_{n_k} \xrightarrow{w} P$. Sei jetzt $\{P_{n_k}\}$ eine weitere konvergierende Teilfolge: $P_{n_k} \xrightarrow{x} P'$.

$$\int f dP = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \int f dP_{n_k} = \lim_{n'_k \rightarrow \infty} \int f dP_{n'_k} = \int f dP' \quad \forall f \in K$$

K ist eine trennende Familie $\Rightarrow P = P'$. Angenommen $P_n \xrightarrow{w} P \Leftrightarrow \exists x_0$ -Stetigkeitsstelle von F (F Verteilungsfunktion von P), so dass

$$F_n(x_0) \rightarrow F(x_0) \Leftrightarrow \exists \epsilon > 0 \text{ und } \{n_k\} : |F_{n_k}(x_0) - F(x_0)| > \epsilon \quad \forall n_k$$

$\exists \{n_{k_j}\} \subseteq \{n_k\} : F_{n_{k_j}}(x) \rightarrow F(x) \quad \forall x$ -Stetigkeitsstellen von F . □

5.13 Beispiel. (1) $K_0^4 = \{f_{a,\epsilon}, a \in \mathbb{R}, \epsilon > 0\}$,

$$f_{a,\epsilon}(x) := \begin{cases} 1, & x \leq a \\ 1 - \frac{x-a}{\epsilon}, & x \in [a, a+\epsilon] \\ 0, & x \geq a+\epsilon \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F_x(a) &= P(X \in (-\infty, a]) = \int \mathbb{1}_{(-\infty, a]} dP_X \leq \int f_{a,\epsilon} dP_X \\ &= \int f_{a,\epsilon} dP_Y \leq P(Y \in (-\infty, a+\epsilon]) = F_Y(a+\epsilon) \end{aligned}$$

Analog $F_Y(a) \leq F_X(a+\epsilon)$

\Rightarrow Falls a eine Stetigkeitsstelle von F_X, F_Y ist: $F_x(a) = F_Y(a)$

(2) $K = \{e^{itx}, t \in \mathbb{R}\}, f_t(x) = e^{itx}$

5.3 Charakteristische Funktionen

5.14 Definition. Sei X eine reellwertige ZV. Die Abbildung $\phi_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\phi_x(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}[\cos(tX)] + i\mathbb{E}[\sin(tX)]$ heißt charakteristische Funktion von X .

5.15 Bemerkung. Ist P_X absolut stetig, mit der Dichte $f(x)$ so gilt:
 $\phi_X(t) \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) dx = \hat{f}(-t)$ wobei $\hat{f}(t)$ die Fouriertransformierte von der Funktion $f(x)$ ist.

5.16 Satz. Jede charakteristische Funktion hat folgende Eigenschaften:

(a) $\phi_X(0) = 1$

(b) $\phi_{-X}(t) = \phi_X(-t) = \overline{\phi_X(t)}$

(c) $P_X = P_{-X} \Leftrightarrow \phi_X(t) \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

⁴eine trennende Familie

(d) $|\phi_X(t)| \leq 1$

(e) ϕ_X ist gleichmäßig stetig

(f) $\phi_{aX+b}(t) = e^{itb}\phi_X(at)$

(g) Sind X und Y unabhängig, so gilt: $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$

Beweis. a), b) offensichtlich.

c) "⇒" $P_X = P_{-X} \Rightarrow \phi_X(t) = \phi_{-X}(t) = \overline{\phi_X(t)} \Rightarrow \phi_X(t) \in \mathbb{R}$

"⇐" $\phi_X(t) \in \mathbb{R} \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \phi_X(t) = \phi_{-X}(t) \forall t \in \mathbb{R}$

Da $\{e^{itX}, t \in \mathbb{R}\}$ eine trennende Familie ist, gilt: $P_X = P_{-X}$

d) $|\phi_X(t)| = |\mathbb{E}[e^{itX}]| \leq \mathbb{E}[|e^{itX}|] = 1$

e) $|\phi_X(t+h) - \phi_X(t)| = |\mathbb{E}[e^{i(t+h)X} - e^{itX}]| \leq \mathbb{E}[|e^{itX}(e^{ihX} - 1)|] = \mathbb{E}[|e^{ihX} - 1|] \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$ wegen dominierter Konvergenz.

f) $\phi_{aX+b}(t) = \mathbb{E}[e^{it(aX+b)}] = \mathbb{E}[e^{itaX}e^{itb}] = e^{itb}\phi_X(ta)$

g) $\phi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[e^{it(X+Y)}] = \mathbb{E}[e^{itX}e^{itY}] \stackrel{5}{=} \mathbb{E}[e^{itX}] \mathbb{E}[e^{itY}] = \phi_X(t)\phi_Y(t).$

□

5.17 Beispiel. Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit den Parametern a, σ^2 , d.h. X hat Dichte:

$$f_{a,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R} (X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2))$$

$$\phi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_{a,\sigma^2}(x) dx$$

Spezialfall: Sei $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$\phi_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \underbrace{i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{=0}$$

$$\phi_Y'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} (-\sin(tx)) x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \stackrel{6}{=} -t \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -t\phi_Y(t)$$

$$\frac{d}{dt} \left[e^{\frac{t^2}{2}} \phi_Y(t) \right] = t e^{\frac{t^2}{2}} \phi_Y(t) + e^{\frac{t^2}{2}} \phi_Y'(t) = e^{\frac{t^2}{2}} [t\phi_Y(t) + \phi_Y'(t)] = 0$$

$$\Rightarrow e^{\frac{t^2}{2}} \phi_Y(t) = \text{const. Da } \phi_Y(0) = 1, \text{ const} = 1 \Rightarrow \phi_Y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$X \sim \mathcal{N}_{a,\sigma^2} \Rightarrow P_X = P_{\sqrt{\sigma^2}Y+a} \Rightarrow \phi_X(t) = \phi_{\sqrt{\sigma^2}Y+a}(t) = e^{ita-\sigma^2\frac{t^2}{2}}$$

⁵sind unabhängig

⁶Partielle Integration mit $u = -\sin(tx), v = e^{-\frac{x^2}{2}}, v' = xe^{-\frac{x^2}{2}}$

5.18 Satz. Sei X eine Zufallsvariable. Ist $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so gilt $\phi_X(t)$ ist k -mal differenzierbar und

$$\phi^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E} \left[X^k e^{itX} \right], \quad (5.1)$$

$\phi^{(k)}$ ist gleichmäßig stetig. Ferner,

$$\mathbb{E}[X^m] = \frac{1}{i^m} \phi^{(m)}(0), \quad m = 0, \dots, k \quad (5.2)$$

und

$$\phi_X(t) = \sum_{j=0}^k \frac{\phi^{(j)}(0)}{j!} t^j + o(|t|^k) \quad \text{für } t \rightarrow 0 \quad (5.3)$$

5.19 Lemma. $\forall x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\left| e^{ix} - \sum_{j=0}^n \frac{(ix)^j}{j!} \right| \leq \min \left\{ \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|x|^n}{n!} \right\}^7$$

Beweis von Satz 5.18. Induktion über k : $k=1$: $\mathbb{E}[|X|] < \infty$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h} - i \mathbb{E}[X e^{itX}] \right| &= \left| \mathbb{E} \left[\frac{e^{i(t+h)X} - e^{itX}}{h} - iX e^{itX} \right] \right| \\ &\leq \mathbb{E} \left[\underbrace{|e^{itX}|}_{=1} \underbrace{\left| \frac{e^{ihX} - 1}{h} - iX \right|}_{=: \psi_h(X)} \right] \end{aligned}$$

Lemma 5.19 mit $n=1$:

$$\psi_n(x) \leq \frac{(|X|h)^2}{2|h|} = \frac{x^2|h|}{2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \Rightarrow \psi_n(X) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{f.s.} 0 :$$

Lemma 5.19 mit $n=0$:

$$\psi_h(x) \leq \left| \frac{e^{ix} - 1}{h} \right| + |x| \leq \frac{|hx|}{|h|} \leq 2|x|$$

$\Rightarrow \psi_h(X)$ hat integrierbare Majorante $2|X|$

\Rightarrow Nach dominierter Konvergenz: $\mathbb{E}[\psi_h(X)] \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

Sei (a) für k bewiesen und $\mathbb{E}[|X|^{k+1}] < \infty \Rightarrow \mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ und $\phi^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}[X^k e^{itX}]$.

⁷Lemma 3.6 im Buch von Durrett

$$\begin{aligned} \left| \frac{\phi^{(k)}(t+k) - \phi^{(k)}(t)}{h} - i^{k+1} \mathbb{E} [X^{k+1} e^{itX}] \right| &\leq \mathbb{E} \left[\left| i^k x^k \frac{e^{i(t+h)X} - e^{itX}}{h} - i^{k+1} X^{k+1} e^{itX} \right| \right] \\ &= \mathbb{E} \left[|X|^k \left| \frac{e^{ihX} - 1}{h} - iX \right| \right] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Wegen dominierter Konvergenz: $\Rightarrow (a)$

$$\begin{aligned} \left| \phi(t) - \sum_{j=0}^k \frac{\phi^{(j)}(0)}{j!} t^j \right| &\leq \mathbb{E} \left[\left| e^{itX} - \sum_{j=0}^k \frac{(itX)^j}{j!} \right| \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\min \left\{ \frac{|tX|^{k+1}}{(k+1)!}, \frac{2|tX|^k}{k!} \right\} \right] \\ &= |t|^k \mathbb{E} \left[\min \left\{ \frac{|t| |X|^{k+1}}{(k+1)!}, \frac{2|X|^k}{k!} \right\} \right] \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

□

$\phi_X^{(k)}(0)$ ist endlich $\Rightarrow \mathbb{E} [|X|^k] < \infty$ Durrett Ch.2 Section 2.3 exercise 3.17:

Ein Beispiel für $\phi'(0) < \infty$ aber $\mathbb{E} [|X|] = \infty$

5.20 Satz. Ist $\phi^{(2n)}(0)$ endlich, so ist $\mathbb{E} [|X|^{(2n)}] < \infty$

Beweis: nur Fall $n=1$.

$$\begin{aligned} \phi''(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[\frac{\phi'(2h) - \phi'(0)}{2h} + \frac{\phi'(0) - \phi'(2h)}{2h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi'(2h) - \phi'(-2h)}{4h} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi'(2h) - 2\phi(0) + \phi'(-2h)}{4h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{4h^2} \mathbb{E} [e^{i(2h)X} - 2 + e^{-i(2h)X}] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{4h^2} \mathbb{E} [(e^{ihX} - e^{-ihX})^2] \\ &= {}^8 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{4h^2} \mathbb{E} [(i2 \sin(hX))^2] = - \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[X^2 \left(\frac{\sin(hX)}{hX} \right)^2 \right] \\ &\leq - \mathbb{E} \left[X^2 \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(hX)}{hX} \right)^2 \right] = - \mathbb{E} [X^2] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E} [X^2] \leq -\phi''(0)$$

□

5.3.1 Inversionssätze und Eindeutigkeitssatz

5.21 Satz. Sei X eine ZV mit Charakteristischer Funktion ϕ . Für alle Stetigkeitspunkte $a < b$ von F_X gilt:

$$F_X(b) - F_X(a) = \lim_{\sigma^2 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{-\sigma^2 t^2 / 2} \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it} dt$$

5.22 Lemma. Sei $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ und unabhängig von X . Dann hat $X + Y$ die Lebesgue-Dichte

$$f^{(0)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{-\sigma^2 t^2/2} e^{-itx} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

Beweis. Verteilung von $X + Y$ = Faltung von P_X und P_Y .

$$f^{(\sigma)}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_Y(x - y) P_X(dy) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}} P_X(dy)$$

$$(Z \sim \mathcal{N}(0, \delta^2) \Rightarrow \phi_Z(t) = e^{-\delta^2 t^2/2})$$

$$\Rightarrow e^{\frac{t^2}{2\sigma^2}} = \text{Charakteristische Funktion von } \mathcal{N}(0, \frac{1}{\sigma^2})$$

$$\Rightarrow e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1}{\sigma^2}}} e^{-\sigma^2 x^2/2} dx$$

Mit $t = (y-x)$:

$$\begin{aligned} f_X^{(\sigma)}(x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1}{\sigma^2}}} e^{i(y-x)u - u^2\sigma^2/2} du \right) P_x(dy) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i(y-x)u - u^2\sigma^2/2} du \right) P_x(dy) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} (e^{iyu} P_x(dy))}_{=\phi(u)} \right) e^{-i(xu - u^2\sigma^2/2)} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi(u) e^{-i(xu - u^2\sigma^2/2)} du \end{aligned}$$

□

Beweis Satz 5.21.

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(b) - F_{X+Y}(a) &= \int_a^b f^{(\sigma)}(x) dx = \int_a^b \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} e^{-itx} dt \right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \left(\int_a^b e^{-itx} dx \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \left(\frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it} \right) dt \end{aligned}$$

$P_{X+Y} = P_{X+\sigma Z}$, wobei $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, Z ist unabhängig von X

$$\Rightarrow X + \sigma Z \xrightarrow{f.s.} X \text{ für } \sigma \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow X + \sigma Z \xrightarrow{w} X \Rightarrow X + Y \xrightarrow{w} X \text{ für } \sigma \rightarrow 0,$$

d.h. $F_{X+Y}(x) \rightarrow F_X(x)$ für jede Stetigkeitsstelle von F_X

$$\Rightarrow F_{X+Y}(b) - F_{X+Y}(a) \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} F_X(b) - F_X(a)$$

$$\begin{aligned} \text{Also, } F_X(b) - F_X(a) &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} (F_{X+Y}(b) - F_{X+Y}(a)) = \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{-\sigma^2 t^2} \left(\frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{(-it)} \right) dt \end{aligned}$$

□

5.23 Korollar (Eindeutigkeitssatz). *Seien X und Y ZVen. Dann gilt:*

$$\phi_X(t) = \phi_Y(t) \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow P_X = P_Y$$

$\Rightarrow \{e^{itx}, t \in \mathbb{R}\}$ ist trennende Klasse.

5.24 Korollar. *Ist $\int_{\mathbb{R}} |\phi_X(t)| dt < \infty$, so hat P_X die Lebesgue-dichte*

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \phi(t) dt \left(= \lim_{\sigma \rightarrow 0} f^{(\sigma)}(x) \right)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} F_X(b) - F_X(a) &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{-\sigma^2 t^2 / 2} \left(\int_a^b e^{-itx} dx \right) dt \\ &= {}^{10} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) \left(\int_a^b e^{-itx} dx \right) dt \\ &= {}^{11} \frac{1}{2\pi} \int_a^b \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{-itx} dt \right) dx \\ &= \int_a^b \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{-itx} dt \right)}_{=f(x)} dx = \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

\Rightarrow Verteilung P_X absolut stetig mit der Dichte $f(x)$

□

5.25 Beispiel. $\phi(t) = e^{-|t|}, t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \phi(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-|t|} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-itx+t} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-itx-t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{t(1-ix)} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-t(1+ix)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-ix} + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1+ix} = \frac{1}{\pi(1+X^2)}, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

¹⁰ dominierte Konvergenz

¹¹ Fubini

Diese Verteilung heißt Cauchy-Verteilung. $xP(|X| > x) \rightarrow \text{Const} > 0$

\Rightarrow kein schwaches Gesetz der großen Zahlen. $\nexists \{a_n\} \frac{S_n}{n} - a_n \xrightarrow{P}$ gilt nicht.

$$S_n = X_1 + \dots + X_n,$$

$$\phi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \phi_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \prod_{i=1}^n \phi_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right) = \prod_{i=1}^n e^{-|\frac{t}{n}|} = e^{-|t|}$$

$\Rightarrow \frac{S_n}{n}$ hat Cauchy verteilung

5.26 Satz (Stetigkeitssatz von Levy). Sei (X_i) eine Folge von ZVen und $\phi_{X_i}(t) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \phi(t) \forall t \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(1) $\phi(t)$ ist eine Cauchy/Charakteristische (?) Funktion

(2) ϕ ist stetig an der Stelle 0

(3) $\{P_{X_n}\}$ ist straff.

(4) P_{X_n} konvergiert schwach

5.27 Korollar.

$$X_n \xrightarrow{w} X \Leftrightarrow \phi_{X_n}(t) \rightarrow \phi_X(t) \forall t \in \mathbb{R}$$

Satz (Bochner-Khinchine-Satz). Eine stetige Funktion ϕ mit $\phi(0) = 1$ ist genau dann eine Charakteristische Funktion, wenn

$$\sum_{i,j=1}^n \phi(t_i - t_j) \lambda_i \overline{\lambda_j} \geq 0 \forall t_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \in \mathbb{C}, \forall n \geq 1$$

Satz 5.26.

(1) \rightarrow (2) Klar.

(3) \rightarrow (4) Da die Klasse $\{e^{itx}\}$ eine trennende Familie ist, folgt dies aus dem Satz 5.12

(3) \rightarrow (1) $\{P_n\}$ ist straff \Rightarrow ¹² $\exists P_{n_k}$ und $P: P_{n_k} \xrightarrow{w} P$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{itx} P_{n_k}(dx)}_{\phi_{X_{n_k}}(t)} \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} P(dx) \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} P(dx) = \phi(t) \forall t \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \phi$ ist eine charakteristische Funktion.

¹²Satz von Prokhorov

(2) \rightarrow (3) : Lemma 5.28

$$\begin{aligned} \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} P\left(|X_n| > \frac{2}{u}\right) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{-n}^n (1 - \phi_X(t)) dt \\ &= \frac{1}{n} \int_{-n}^n (1 - \phi(t)) dt \end{aligned}$$

ϕ ist steig an der Stelle 0 \Rightarrow Wir können so ein u_ϵ wählen, dass

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P\left(|X_n| > \frac{2}{u}\right) \leq \epsilon \quad \forall u \leq u_\epsilon \Rightarrow \{P_{X_n}\}$$

ist straff

□

5.28 Lemma. Sei X eine Zufallsvariable mit charakteristischer Funktion ϕ_X . Für jedes $u > 0$:

$$P\left(|X| > \frac{2}{u}\right) \leq \frac{1}{u} \int_{-u}^u (1 - \phi_X(t)) dt$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} \int_{-u}^u (1 - \phi_X(t)) dt &= \frac{1}{u} \int_{-u}^u \left(\int_{\mathbb{R}} (1 - e^{itx}) P_X(dx) \right) dt \\ &= \frac{1}{u} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-u}^u (1 - e^{itx}) dt \right) P_X(dx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-u}^u (1 - e^{itx}) dt &= 2u - \int_{-u}^u e^{itx} dt = 2u - \int_{-u}^u \cos(tx) dt - i \underbrace{\int_{-u}^u \sin(tx) dt}_{=0} \\ &= 2u - 2 \int_{-u}^u \cos(tx) dt = 2u \left(1 - \frac{\sin(xu)}{ux} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{u} \int_{-u}^u (1 - \phi_X(t)) dt &= 2 \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{\sin(ux)}{ux} P_x(dx) \right) \\ &\geq 2 \int_{\{|x| \geq \frac{2}{u}\}} \left(1 - \frac{\sin(ux)}{ux} \right) P_x(dx) \\ &\geq 2 \int_{\{|x| \geq \frac{2}{u}\}} \left(1 - \frac{1}{ux} \right) P_x(dx) \\ &\geq 2 \frac{1}{2} \int_{|x| \geq \frac{2}{u}} P_X dx \\ &= P\left(|X| \geq \frac{2}{u}\right) \end{aligned}$$

□

5.29 Satz. Seien $(X_i)_{i \geq 1}$ iid ZVen mit der charakteristischen Funktion $\phi(t)$.

Ist $\phi'(0) = ia$, $a \in \mathbb{R}$, so gilt: $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} a$.

Beweis. $\phi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \phi_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \left(\phi\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$

ϕ ist differenzierbar $\Rightarrow \phi(\tau) = \phi(0) + \phi'(0)\tau + o(\tau)$, $\tau \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \phi\left(\frac{t}{n}\right) = 1 + ia\frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ für } n \rightarrow \infty \text{ und jedes } t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left(\phi\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(1 + ia\frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{ita}$$

$$\Rightarrow {}^{13}\phi_{\frac{S_n}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{ita}; \forall t \in \mathbb{R}$$

Stetigkeitssatz von Levy $\Rightarrow \frac{S_n}{n}$ konvergiert schwach, aber e^{ita} ist charakteristische Funktion von ZV Y : $P(Y = a) = 1 \Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{w} a \Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} a \quad \square$

¹³ $\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n \rightarrow e^x$ falls $x_n \rightarrow x$

Kapitel 6

Zentraler Grenzwertsatz

6.1 Klassischer Zentraler Grenzwertsatz

Seien $(X_i)_{i \geq 1}$ iid mit $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$ und $\sigma^2 := \text{Var}[X_1] \in (0, \infty)$.

6.1 Satz. Ist $\sigma^2 \in (0, \infty)$, so gilt

$$\frac{S_n - n\mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0, 1)$$

Falls $\sigma^2 = 0$, so ist X_1 eine nichtzufällige Zufallsvariable, d.h.

$$P(X_1 = \mathbb{E}[X_1]) = 1 \Rightarrow P(S_n = n\mathbb{E}[X_1]) = 1$$

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass $\mathbb{E}[X_1] = 0$ und $\text{Var}[X_1] = 1$. (Sonst gehen wir zu ZVen $Y_i = \frac{X_i - \mathbb{E}[X_i]}{\sigma}$

$$\phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \phi_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

$$\mathbb{E}[X_1^2] = 1 \Rightarrow \phi_{X_1}(\tau) = 1 + \phi'(0)\tau + \phi''(0)\frac{\tau^2}{2} + o(\tau^2) \text{ für } \tau \rightarrow 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{E}[X_1] = 0 \Rightarrow \phi'(0) = 0 \\ \mathbb{E}[X_1^2] = 1 \Rightarrow \phi''(0) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ für } n \rightarrow \infty$$
$$\Rightarrow \left(\phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}$$
$$\Rightarrow \phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$e^{-\frac{t^2}{2}}$ ist die charakteristische Funktion von $\mathcal{N}(0, 1)$ Nach Stetigkeitssatz von Levy, $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0, 1)$ □

6.2 Verallgemeinerung vom ZGWS

6.2 Definition. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $k_n \in \mathbb{N}$ und seien $(X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,k_n})$ reelle Zufallsvariablen. Wir nennen $(X_{n,l}, n \in \mathbb{N}, l \leq k_n)$ ein Dreiecksschema. Sei $S_n = \sum_{l=1}^{k_n} X_{n,l}$

$$\begin{array}{ccccccc} X_{1,1} & \cdots & X_{1,k_1} & & & & \\ X_{2,1} & \cdots & \cdots & X_{2,k_2} & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ X_{n,1} & & \cdots & \cdots & & & X_{n,k_n} \end{array}$$

Das Dreiecksschema heißt:

unabhängig , falls $(X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n})$ unabhängig sind, $\forall n \geq 1$

zentriert , falls $X_{n,l} \in L^1$ und $\mathbb{E}[X_{n,l}] = 0 \forall n, l$

normiert , falls $X_{n,l} \in L^2$ und $\sum_{l=1}^{k_n} \text{Var}[X_{n,l}] = 1$ (Mit anderen Worten $\text{Var}[S_n] = 1$, falls unabhängig)

6.3 Definition. a) Ein zentriertes Dreiecksschema heißt asymptotisch vernachlässigbar, falls für jedes $\epsilon > 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{l \leq k_n} P(|X_{n,l}| > \epsilon) = 0$

b) Ein zentriertes Dreiecksschema erfüllt die Lindeberg-Bedingung, falls für jedes $\epsilon > 0$

$$\frac{1}{\text{Var}[S_n]} \sum_{l=1}^{k_n} \mathbb{E} \left[X_{n,l}^2 \mathbb{1}_{\{X_{n,l}^2 > \epsilon^2 \text{Var}[S_n]\}} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

6.4 Satz (Satz von Lindeberg-Feller). *Sie $(X_{n,l})$ ein unabhängiges, zentriertes und normiertes Dreiecksschema. Dann sind äquivalent:*

1) $(X_{n,l})$ erfüllt die Lindeberg-Bedingung

2) $(X_{n,l})$ ist asymptotisch, vernachlässigbar und $S_n \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0, 1)$

Beweis. Klenke 15.5

□

(X_i) iid mit $\sigma^2 \in (0, \infty)$

$$Y_{n,l} = \frac{X_l - \mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n\sigma^2}}, \quad l \leq n(=k_n)$$

$\Rightarrow (Y_{n,l})$ ein zentriertes, norm. und unabh. Dreiecksschema. $\text{Var}[S_n] = 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{l=1}^n \mathbb{E} \left[Y_{n,l}^2 \mathbb{1}_{\{Y_{n,l}^2 > \epsilon^2\}} \right] &= n \mathbb{E} \left[Y_{n,1}^2 \mathbb{1}_{\{Y_{n,1}^2 > \epsilon^2\}} \right] \\ &= n \mathbb{E} \left[\frac{(X_1 - \mathbb{E}[X_1])^2}{n\sigma^2} \mathbb{1}_{\frac{(X_1 - \mathbb{E}[X_1])^2}{n\sigma^2} > \epsilon^2} \right] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E} \left[(X_1 - \mathbb{E}[X_1])^2 \mathbb{1}_{\{(X_1 - \mathbb{E}[X_1])^2 > n\sigma^2\epsilon^2\}} \right] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

nach dominierter Konvergenz.

$$\xrightarrow{\text{Satz 6.4}} \frac{\sum_{l=1}^n X_l - n\mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n\sigma^2}} = \sum_{l=1}^n \frac{X_l - \mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n\sigma^2}} = \sum_{l=1}^n Y_{n,l} \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0, 1)$$

6.5 Definition. Man sagt, dass das Schema die Lyapunov-Bedingung erfüllt, falls für ein $\delta > 0$

$$\frac{1}{(\text{Var}[S_n])^{1+\frac{\delta}{2}}} \sum_{l=1}^{k_n} \mathbb{E} \left[|X_{n,l}|^{2+\delta} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Lyapunov-Bedingung \Rightarrow Lindeberg-Bedingung:

$$x^2 \mathbb{1}_{\{|x| > a\}} \leq a^{-\delta} |x|^{2+\delta} \mathbb{1}_{\{|x| > a\}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[X_{n,l}^2 \mathbb{1}_{\{X_{n,l}^2 > \epsilon^2 \text{Var}[S_n]\}} \right] &= \mathbb{E} \left[X_{n,l}^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,l}| > \epsilon (\text{Var}[S_n])^{\frac{1}{2}}\}} \right] \\ &\leq \epsilon^{-\delta} (\text{Var}[S_n])^{-\frac{\delta}{2}} \mathbb{E} \left[|X_{n,l}|^{2+\delta} \mathbb{1}_{\{\dots\}} \right] \\ &\leq \epsilon^{-\delta} (\text{Var}[S_n])^{-\frac{\delta}{2}} \mathbb{E} \left[|X_{n,l}|^{2+\delta} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\text{Var}[S_n]} \sum \mathbb{E} \left[X_{n,l}^2 \mathbb{1}_{\{X_{n,l}^2 > \epsilon^2 \text{Var}[S_n]\}} \right] \leq \epsilon^{-\delta} \sum_{l=1}^{k_n} \frac{\mathbb{E} \left[|X_{n,l}|^{2+\delta} \right]}{(\text{Var}[S_n])^{1+\frac{\delta}{2}}}$$

6.6 Beispiel. Seien (X_i) unabhängige ZVen mit $P(X_i = \pm i^\alpha) = \frac{1}{2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Definiere $Y_{n,l} = \frac{X_l}{\sqrt{B_n}}$, $l \leq n$,

$$B_n = \text{Var} \left[\sum_{l=1}^n X_l \right] = \sum_{l=1}^n \text{Var}[X_l] = \sum_{l=1}^n l^{2\alpha}$$

$\Rightarrow (Y_{n,l})$ ist ein unabhängiges zentriertes und normiertes Dreiecksschema.

Frage: Für welche α konvergiert S_n gegen $\mathcal{N}(0, 1)$?

$\alpha > -\frac{1}{2}$. Hier gilt: $B_n = \sum_{l=1}^n l^{2\alpha} \sim \frac{1}{2\alpha+1} n^{2\alpha+1}$ für $n \rightarrow \infty$. Ausserdem

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \mathbb{E} \left[|Y_{n,l}|^3 \right] &= \sum_{l=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{|X_l|^3}{B_n^{\frac{3}{2}}} \right] = \frac{1}{B_n^{\frac{3}{2}}} \sum_{l=1}^n l^{3\alpha} \\ &\sim \frac{1}{B_n^{\frac{3}{2}}} \begin{cases} \text{Const,} & \text{falls } \alpha < -\frac{1}{3} \\ \log n, & \text{falls } \alpha = -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3\alpha+1} n^{3\alpha+1}, & \text{für } \alpha > -\frac{1}{3} \end{cases} \sim 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \text{Lyapunov-Bedingung mit } \delta = 1 \Rightarrow \sum_{l=1}^n Y_{n,l} \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0, 1) \\ &\Rightarrow \frac{\sum_{l=1}^n X_l}{\sqrt{B_n}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1) \\ &\Rightarrow \frac{\sqrt{2\alpha+1} \sum_{l=1}^n X_l}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}} \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha = -\frac{1}{2} \text{ Hier } B_n &\sim \log n \\ \sum_{l=1}^n \mathbb{E} \left[|Y_{n,l}|^3 \right] &= \frac{1}{B_n^{\frac{3}{2}}} \sum_{l=1}^n l^{-\frac{3}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ &\Rightarrow \frac{\sum_{l=1}^n X_l}{\sqrt{\log n}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1) \end{aligned}$$

$\alpha < -\frac{1}{2}$ $B_n = \sum_{l=1}^n l^{2\alpha}$ bleibt beschränkt. Ausserdem $\sum_{l=1}^n \mathbb{E} \left[|Y_{n,l}|^{2+\delta} \right] = \frac{1}{B_n^{\frac{3}{2}}} \sum_{l=1}^n l^{\alpha(2+\delta)} \geq c > 0 \Rightarrow$ Lyapunov-Bedingung ist *nicht* erfüllt.
Nach dem Kolmogorov'schen 3-Reihen-Satz konvergiert

$$\sum_{l=1}^n X_l \xrightarrow{\text{fast sicher}} \sum_{l=1}^{\infty} X_l$$

$$\begin{aligned} \phi_{\sum_{l=1}^n X_l}(t) &= \prod_{l=1}^n \phi_{X_l}(t) = \prod_{l=1}^n \mathbb{E} \left[e^{-itX_l} \right] = \prod_{l=1}^n \left(\frac{1}{2} e^{itl^\alpha} + \frac{1}{2} e^{-itl^\alpha} \right) \\ &= \prod_{l=1}^n \cos(tl^\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underbrace{\prod_{l=1}^{\infty} \cos(tl^\alpha)}_{\text{hat Nullstellen}} \neq \underbrace{e^{-ct^2}}_{\text{immer positiv}} \end{aligned}$$

6.3 Konvergenzrate im ZGWS

Seien (X_i) iid ZVen mit $\sigma^2 \in (0, \infty)$
ZGWS:

$$P \left(S_n \leq n\mathbb{E}[X_1] + \sqrt{n\sigma^2}x \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du =: \phi(x)$$

¹Bleibt unbeschränkt

6.7 Satz (Berry-Esseen-Ungleichung). *Seien (X_i) iid ZVen mit $\mathbb{E}[|X_1|^3] < \infty$. Dann gilt:*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P\left(\frac{S_n - n\mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq x\right) - \phi(x) \right| \leq 0.7655 \frac{\mathbb{E}[|X_1|^3]}{(\sigma^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

2

Seien (X_i) iid ZVen mit $P(X_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Alle ZVen haben symmetrische Verteilung \Rightarrow Verteilung von S_n ist auch symmetrisch, $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(S_{2n} \leq 0) &= 1 - P(S_{2n} > 0) = 1 - P(S_{2n} \geq 0) + P(S_{2n} = 0) \\ &= 1 - P(S_{2n} \leq 0) + P(S_{2n} = 0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(S_{2n} < 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(S_{2n} = 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$\begin{aligned} \sup_x \left| P\left(\frac{S_n}{\sqrt{2n}} \leq x\right) - \phi(x) \right| &\geq P\left(\frac{S_n}{\sqrt{2n}} \leq 0\right) - \underbrace{\phi(0)}_{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} \text{ für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sup_x \left| P\left(\frac{S_n}{\sqrt{2n}} \leq 1\right) - \phi(x) \right| \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Die Konstante in der Berry-Esseen-Ungleichung kann nicht kleiner als $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ sein. (Konstante $\geq \frac{\sqrt{10+3}}{6\sqrt{2\pi}} \approx 0.45097$)

6.8 Lemma. *Sei F eine Verteilungsfunktion und G eine weitere Verteilungsfunktion mit $G'(x) \leq \lambda < \infty$. Seien $\Delta = \sup_x |F(x) - G(x)|$, $\Delta_L = \sup_x \left| \int F(x-u)h_L(u)du - \int G(x-u)h_L(u)du \right|$ wobei $h_L(x) = \frac{1-\cos(Lx)}{\pi Lx^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

$$\Delta \leq 2\Delta_L + \frac{24\lambda}{\pi L}, \quad L > 0$$

Beweis. F, G sind Verteilungsfunktionen $\Rightarrow |F(x) - G(x)| \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$
 $\Rightarrow \exists x_0 : F(x_0) - G(x_0) = \Delta$ ³ oder $F(x_0 - 0) - G(x_0) = -\Delta$
 $G'(x) \leq \lambda \Rightarrow F(x_0 + s) - G(x_0 + s) \geq \Delta - \lambda S, S \geq 0$

²Vor 2007 war die Konstante 0.8

³Wir betrachten nur diesen Fall

Definiere $\delta = \frac{\Delta}{2\lambda}$, $t = x_0 + \delta$

$$\Rightarrow F(t-x) - G(t-x) \geq \begin{cases} \frac{\Delta}{2} + \lambda x, & |x| < \delta \\ -\delta, & \text{sonst} \end{cases}$$

Jetzt schätzen wir Δ_L nach unten ab.

$$\begin{aligned} \Delta_L &\geq \int_{\mathbb{R}} (F(t-u) - G(t-u)) h_L(u) du \\ &= \int_{\{u: |u| \leq \delta\}} (F(t-u) - G(t-u)) h_L(u) du + \int_{\{u: |u| \geq \delta\}} \dots \\ &\geq \int_{-\delta}^{\delta} \left(\frac{\Delta}{2} + \lambda u\right) h_L(u) du - \Delta \int_{\{u: |u| > \delta\}} h_L(u) du \\ &= \frac{\Delta}{2} \int_{-\delta}^{\delta} h_L(u) du - \Delta \int_{\{u: |u| > \delta\}} h_L(u) du \\ &= \frac{\Delta}{2} \left(1 - \int_{\{u: |u| > \delta\}} h_L(u) du\right) - \Delta \int_{\{u: |u| > \delta\}} h_L(u) du \\ &= \frac{\Delta}{2} - \frac{3\Delta}{2} \int_{\{u: |u| > \delta\}} h_L(u) du \\ &= \frac{\Delta}{2} - 2\Delta \int_{\delta}^{\infty} \frac{1 - \cos Lu}{\pi Lu^2} du \\ &\geq \frac{\Delta}{2} - 3\Delta \int_0^{\infty} \frac{2}{\pi Lu^2} du \\ &= \frac{\Delta}{2} - \frac{6\delta}{\pi L} \frac{1}{\delta} \\ &= \frac{\Delta}{2} - \frac{6\delta}{\pi L} \frac{2\lambda}{\Delta} \\ &= \frac{\Delta}{2} - \frac{12\lambda}{\pi L} \end{aligned}$$

□

6.9 Lemma. Seien X_1, X_2 ZVen mit F_1, F_2 und mit integrierbaren charakteristischen Funktionen ϕ_1 und ϕ_2 . Dann gilt:

$$F_1(x) - F_2(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \frac{\phi_1(t) - \phi_2(t)}{it} dt$$

Beweis. Diese Aussage folgt aus Korollar 5.24 (Durrett, Section 2.4) □

6.10 Lemma. Seien F und G Verteilungsfunktionen mit charakteristischen Funktionen ϕ_F und ϕ_G . Für jedes $L > 0$ gilt:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - G(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L |\phi_F(t) - \phi_G(t)| \frac{1}{|t|} dt + \frac{24\lambda}{\pi L}$$

Beweis. $\Delta \leq 2\Delta_L + \frac{24L}{\pi L}$

$$F_L(x) = \int F(x-u)h_L(u)du, \quad G_L(x) = \int G(x-u)h_L(u)du$$

Da die charakteristischen Funktionen der Verteilung mit Dichte $h_L(x)$ gleich $\left(1 - \frac{|t|}{L}\right)^t$ ist, sind die charakteristischen Funktionen von F_L und G_L

$$\phi_F(t) \left(1 - \frac{|t|}{L}\right)^t \quad \text{und} \quad \phi_G(t) \left(1 - \frac{|t|}{L}\right)^t$$

Nach Lemma 6.9:

$$\begin{aligned} |F_L(x) - G_L(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| \phi_F(t) \left(1 - \frac{|t|}{L}\right)^t - \phi_G(t) \left(1 - \frac{|t|}{L}\right)^t \right| \frac{1}{|t|} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L \left| \phi_F(t) \left(1 - \frac{|t|}{L}\right)^t - \phi_G(t) \left(1 - \frac{|t|}{L}\right)^t \right| \frac{dt}{|t|} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L |\phi_F(t) - \phi_G(t)| \frac{dt}{|t|} \end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 6.7. $G(x) = \phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$

$G'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \lambda$ Wir werden annehmen, dass

$$\mathbb{E}[X_1] = 0, \quad \text{Var}[X_1] = 1$$

Wir wenden Lemma 6.10 mit

$$F(x) = P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) \quad \text{und} \quad G(x) = \phi(x)$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) - \phi(x) \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L \left| \phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) - e^{-\frac{u^2}{2}} \right| \frac{dt}{|t|} + \frac{24}{\sqrt{2\pi}\pi L}$$

Aus Lemma 5.19 folgt, dass $\left| \phi_{X_1}(t) - 1 + \frac{t^2}{2} \right| \leq \mathbb{E}[|X_1|^3] \frac{|t|^3}{6}$.

Falls $t^2 \leq 2$, $|\phi_{X_1}(t)| \leq 1 - \frac{t^2}{2} + \mathbb{E}[|X_1|^3] \frac{t^3}{6}$.

Wähle $L = \frac{4\sqrt{n}}{3\mathbb{E}[|X_1|^3]}$. Dann für $|t| \leq L$ mit:

$$\begin{aligned} \left| \phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right| &\leq 1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{\mathbb{E}[|X_1|^3] |t|^3}{6n^{\frac{3}{2}}} \leq 1 - \frac{t^2}{n2} + \frac{\mathbb{E}[|X_1|^3]}{6n^{\frac{3}{2}}} \frac{4\sqrt{n}}{3\mathbb{E}[|X_1|^3]} t^2 \\ &= 1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{4}{18} \frac{t^2}{n} = 1 - \frac{5t^2}{18n} \leq e^{-\frac{5t^2}{18n}} \end{aligned}$$

Dann:

$$\begin{aligned}
\left| \phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| &= \left| \left(\phi_{X_1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n - \left(e^{-\frac{t^2}{2n}} \right)^n \right) \right| \\
&= \left| \sum_{m=0}^{n-1} \left(\phi_{X_1}^{n-m} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) e^{-\frac{t^2}{2n}} - \phi_{X_1}^{n-m-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) e^{-\frac{t^2(m+1)}{2n}} \right) \right| \\
&\leq \sum_{m=0}^{n-1} \left| \phi_{X_1}^{n-m-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) e^{-\frac{t^2 m}{2n}} \right| \left| \phi_{X_1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - e^{-\frac{t^2}{2n}} \right| \\
&\leq n \left| \phi_{X_1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - e^{-\frac{t^2}{2n}} \right| \left(\max \left\{ \left| \phi_{X_1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right|, e^{-\frac{t^2}{2n}} \right\} \right)^{n-1} \\
&\leq n \left| \phi_{X_1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - e^{-\frac{t^2}{2n}} \right| e^{-\frac{5t^2}{18n}(n-1)} \\
&\leq 4n \left| \phi_{X_1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - e^{-\frac{t^2}{2n}} \right| e^{-\frac{t^2}{4}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n \left| \phi_{X_1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - e^{-\frac{t^2}{2n}} \right| &\leq n \left| \phi_{X_1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - 1 + \frac{t^2}{2n} \right| + n \left| e^{-\frac{t^2}{2n}} - 1 + \frac{t^2}{2n} \right| \\
&\leq n \mathbb{E} \left[|X_1|^3 \right] \frac{|t|^3}{6n^{\frac{3}{2}}} + n \left| e^{-\frac{t^2}{2n}} - 1 + \frac{t^2}{2n} \right|
\end{aligned}$$

Wegen $|e^{-x} - 1 + x| \leq \frac{x^2}{2}$ gilt, $n \left| e^{-\frac{t^2}{2n}} - 1 + \frac{t^2}{2n} \right| \leq \frac{t^4}{8n}$

$$\Rightarrow \left| \phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leq \left(\frac{\mathbb{E}[|X_1|^3]|t|^3}{6n^{\frac{1}{2}}} + \frac{t^4}{8n} \right) e^{-\frac{t^2}{4}}, \quad |t| \leq L \text{ und } n \geq 10$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sup_x \left| P \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) - \phi(x) \right| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L e^{-\frac{t^2}{4}} \left(\frac{\mathbb{E}[|X_1|^3] t^2}{6n^{\frac{1}{2}}} + \frac{|t|^3}{8n} \right) dt + \frac{24}{\sqrt{2\pi}\pi L} \\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L e^{-\frac{t^2}{4}} (\dots) dt + \frac{24}{\sqrt{2\pi}\pi L}
\end{aligned}$$

□

6.3.1 Gesetz vom iterierten Logarithmuss

Sei $\{X_i\}$ eine Folge von iid ZVen. $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

- Gesetz der großen Zahlen $\mathbb{E}[X_i] = a \Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{f.s.} a$

⁴für $n \geq 10$

- ZGWS beschränkt die Schwankungen von S_n

$$P\left(\frac{S_n - na}{\sqrt{\sigma^2 n}} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi(x)$$

$$\Rightarrow P(|S_n - na| > x\sqrt{n}\sigma^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2(1 - \phi(x))$$

6.11 Satz (Gesetz vom iterierten Logarithmus). Ist $\mathbb{E}[X_1] = 0$ und $\sigma^2 = \text{Var}[X_1] \in (0, \infty)$, so gilt:

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2\sigma^2 n \log \log n}} = 1\right) = 1 \text{ und } P\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2\sigma^2 n \log \log n}} = -1\right) = 1$$

Wir werden den Satz unter der Annahme $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ beweisen.

6.12 Lemma. Seien (X_1) iid ZVen mit einer symmetrischen Verteilung, d.h. $P_{X_1} = P_{-X_1}$. Dann gilt:

$$P\left(\max_{k \leq n} S_k \geq x\right) \leq 2P(S_n \geq x)$$

Beweis. $A = \left\{\max_{k \leq n} S_k \geq x\right\}$ $B_x = \{S_i \leq x, \forall j \leq k, S_k > x\}$, $B = \{S_n > x\}$

Für jedes k gilt:

$$P(B \cap B_k) \geq P(B_k \cap \{S_n \geq S_k\}) = P\left(\underbrace{B_k}_{\in \sigma(X_1, \dots, X_k)} \cap \underbrace{\{X_{k+1} + \dots + X_n \geq 0\}}_{\in \sigma(X_{k+1}, \dots, X_n)}\right)$$

$$= P(B_k) P(X_{k+1} + \dots + X_n \geq 0)$$

$$P(X_{k+1} + \dots + X_n \geq 0) = 1 - P(X_{k+1} + \dots + X_n < 0)$$

$$= 1 - P(X_{k+1} + \dots + X_n) + P(X_{k+1} + \dots + X_n = 0)$$

$$= {}^5 1 - P(X_{k+1} + X_n \geq 0) + P(X_{k+1} + \dots + X_n = 0)$$

$$\Rightarrow P(X_{k+1} + \dots + X_n \geq 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(X_{k+1} + \dots + X_n = 0) \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(B \cap B_k) \geq \frac{1}{2}P(B_k)$$

$$\Rightarrow P(B) = P\left(B \cap \left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right)\right) = \sum_{k=1}^n P(B \cap B_k)$$

$$\geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n P(B_k) = \frac{1}{2}P\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) = \frac{1}{2}P\left(\max_{k \leq n} S_k > x\right)$$

□

⁵Symmetrie

6.13 Lemma. Sei $Y_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ mit $\sigma_n^2 \uparrow \infty$. Sei $a_n : \frac{a_n}{\sqrt{\sigma_n^2}} \rightarrow \infty$. Dann gilt:

$$P(Y_n > a_n) \sim \frac{\sqrt{\sigma_n^2}}{\sqrt{2\pi}a_n} e^{-\frac{a_n^2}{2\sigma_n^2}} \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Beweis. $Z_n := \frac{Y_n}{\sqrt{\sigma_n^2}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$\text{Also, } P(Y_n > a_n) = P\left(Z_n > \frac{a_n}{\sigma_n}\right) = \int_{\frac{a_n}{\sigma_n}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

L'Hospital Regel: $\int_x^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \sim \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \rightarrow \infty$ □

Beweis Satz 11. $\sigma^2 = 1$ $\psi_n := \sqrt{2n \log \log n}$

Wähle $\epsilon > 0 \Rightarrow \lambda = 1 - \epsilon$, $n_k = \lambda^k$, $k \geq k_0$, wobei $k_0 > e(\log \log k_0)$

Definiere $A_k = \{S_n > \lambda \psi_n \text{ für ein } n \in (n_k, n_{k+1}]\}$ und

$A = \{A_k \text{ tritt unendlich oft ein}\} = \{S_n > \lambda \psi_n \text{ tritt für unendlich viele } n \text{ ein}\}$

Wenn wir zeigen, dass $\sum_{k \geq k_0} P(A_k)$ endlich ist, dann gilt nach Borel-Cantelli-lemma: $P(A) = 0 \Rightarrow P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\psi_n} = \lambda\right) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\psi_n} > 1\right) &= P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \left\{\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\psi_n} > 1 + \frac{1}{j}\right\}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\psi_n} > 1 + \frac{1}{j}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_k) &\leq P(S_n \geq \lambda \psi_{n_k} \text{ für ein } n \in (n_k, n_{k+1}]) \\ &\leq P\left(\max_{n < n_{k+1}} S_n \geq \lambda \psi_{n_k}\right) \\ &\leq 2P(S_{n_{k+1}} \geq \lambda \psi_{n_k}) \end{aligned}$$

Nach Lemma 6.13:

$$\begin{aligned} P(S_{n_{k+1}} > \lambda \psi_{n_k}) &\sim \frac{\sqrt{n_{k+1}}}{\sqrt{2\pi} \lambda \psi_{n_k}} e^{-\frac{(\lambda \psi_{n_k})^2}{2n_{k+1}}} \\ &\leq C e^{-\lambda \log \log n_k} = C(\log n_k)^{-\lambda} \\ &\leq C_1 k^{-\lambda}, \quad \lambda = 1 + \epsilon \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1-\epsilon} < \infty \Rightarrow \sum_{k \geq k_0} P(A_k) < \infty$$

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\psi_n} \leq 1\right) = 1 \tag{6.1}$$

$\epsilon > 0, \lambda = 1 - \epsilon$. Wenn wir zeigen, dass

$$P(S_n > \lambda \psi_k \text{ für unendlich viele } n) = 1 \quad (6.2)$$

dann bekommen wir:

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\psi_n} \geq 1\right) = P\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\psi_n} \geq 1 - \epsilon\right) = 1$$

Zuerst (1) auf Folge $(-S_n)$ anwenden:

$$\Rightarrow P(-S_n \leq 2\psi_n \text{ für alle gegen } n) = 1$$

$$n_k = N^k, N > 1 \Rightarrow P(S_{n_{k-1}} - 2\psi_{n_{k-1}} \text{ für alle großen } k) = 1$$

$$Y_k := S_{n_k} - S_{n_{k-1}} \Rightarrow \{S_{n_{k-1}} \geq -2\psi_{n_{k-1}}\} = \{S_{n_k} \geq Y_k - 2\psi_{n_{k-1}}\} \quad (6.3)$$

Wir nehmen an, dass

$$P(Y_k > \lambda \psi_{n_k} + 2\psi_{n_{k-1}} \text{ für unendl. viele } k) \cap \{S_{n_{k-1}} \geq -2\psi_{n_{k-1}} \forall k \geq k_0\} = 1$$

$\{X_k\}$ sind unabhängig und $Y_k \sim \mathcal{N}(0, n_k - n_{k-1})$. Dann nach Lemma 6.13,

$$\begin{aligned} P(Y_k > \lambda \psi_{n_k} + 2\psi_{n_{k-1}}) &\geq {}^6 P\left(Y_k > \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)\psi_{n_k}\right) \\ &\sim \frac{\sqrt{n_k - n_{k-1}}}{\sqrt{2\pi}(1 - \frac{\epsilon}{2}\psi_{n_k})} \exp\left\{-\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^2 \frac{\psi_{n_k}^2}{2(n_k - n_{k-1})}\right\} \\ &\geq \frac{c}{(\ln \ln N^k)^{\frac{1}{2}}} e^{\{-(1-\delta) \log \log N^k\}} \text{ für ein } \delta > 0 \\ &\geq \frac{\text{const}(N)}{(\log k)^{\frac{1}{2}}} k^{-1+\delta} \\ &\sum_{k \geq 2} \frac{k^{-1-\delta}}{(\log K)^{\frac{1}{2}}} = \infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow \sum_{k \geq 2} P(Y_k \geq \lambda \psi_{n_k} + 2\psi_{n_{k-1}}) = \infty$ und $\{Y_k > \lambda \psi_{n_k} + 2\psi_{n_{k-1}}\}$ - unabhängige Ereignisse.

$$\Rightarrow P(Y_k \geq \lambda \psi_{n_k} + 2\psi_{n_{k-1}} \text{ unendlich viele } k) = 1$$

$$\Rightarrow P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\psi_n} = 1\right) = 1$$

□

6.4 Poisson'sche Approximation

Seien (X_i) iid ZVen mit $P(X_1 = 1) = p$, $P(X_1 = 0) = 1 - p$, $p \in (0, 1)$

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi(x)$$

$$\begin{array}{llll} X_{1,1}, & \dots, & X_{1,k_1}, & P(X_{1,k} = 1) = p_{n,k} \\ X_{2,1}, & \dots, & X_{2,k_2}, & P(X_{2,k} = 0) = 1 - p_{n,k} \\ \vdots & & \vdots & \\ X_{n,1}, & \dots, & X_{n,k_n}, & P(X_{n,k} = 0) = 1 - p_{n,n} \end{array}$$

$$X \sim \frac{\text{Poisson}(\mu)}{\mu > 0} : P(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}, k \geq 0$$

6.14 Satz. Für jedes $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt:

$$|P(S_n \in B) - \text{Poisson}_{\mu_n}(B)| \leq \sum_{k=1}^{k_n} p_{n,k}^2$$

Wobei $\mu_n = \sum_{k=1}^n p_{n,k}$

6.15 Korollar. Falls $\mu_n \rightarrow \mu$ und $\max_{k \leq k_n} p_{n,k} \rightarrow 0$ so gilt $S_n \xrightarrow{w} \text{Poisson}_\mu$

Beweis (Coupling). Sei $\omega = (0, 1)^{k_n}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$, $P = \text{Lebesgue-Maß auf } \Omega$

Unser Ziel: $(Y_{n,k})_{k=1}^n$ mit $Y_{n,k} \sim \text{Bernoulli}(p_{n,k})$

$(Z_{n,k})_{k=1}^n$ mit $Z_{n,k} \sim \text{Poisson}(p_{n,k})$ $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{n_k})$

$$\text{Definiere } Y_{n,k}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega_k > 1 - p_{n,k} \\ 1, & \omega_k \leq 1 - p_{n,k} \end{cases}$$

$\Rightarrow P(Y_{n,k} = 1) = P(\omega_k \leq 1 - p_{n,k}) = p_{n,k}$. Außerdem gilt, dass $\{Y_{n,k}\}$ unabhängig. Setze $\pi_r = \sum_{m=0}^r \frac{(p_{n,k})^m}{m!} e^{-p_{n,k}}$, $r = 0, 1, \dots$

$$\text{Definiere } Z_{n,k} = \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\omega_k \in [\pi_{r-1}, \pi_r)\}} = \begin{cases} 0, & \omega_k < \pi_0 \\ r, & \text{falls } \omega_k \in [\pi_{r-1}, \pi_r) \end{cases}$$

$$P(Z_{n,k} = r) = P(\omega_k \in [\pi_{r-1}, \pi_r)) = \frac{(p_{n,k})^r}{r!} e^{-p_{n,k}}$$

$\Rightarrow Z_{n,k} \sim \text{Poisson}(p_{n,k})$ und $\{Z_{n,k}\}$ sind unabhängig.

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(Y_{n,k} \neq Z_{n,k}) &= P(\omega_k \in [1 - p_{n,k}, e^{-p_{n,k}}] \text{ oder } \omega_k \in (e^{-p_{n,k}} + p_{n,k}e^{-p_{n,k}}, 1]) \\ &= (e^{-p_{n,k}} - 1 + p_{n,k}) + (1 - e^{-p_{n,k}} - p_{n,k}e^{-p_{n,k}}) \\ &= p_{n,k}(1 - e^{-p_{n,k}}) \leq {}^7 p_{n,k} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P\left(\sum_{n=1}^{k_n} Y_{n,k} \neq \sum_{n=1}^{k_n} Z_{n,k}\right) \leq P\left(\bigcup_{n=1}^{k_n} Z_{n,k} \neq Y_{n,k}\right) \leq \sum_{n=1}^{k_n} p_{n,k}^2$$

⁷ $1 - e^{-x} \leq x$

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{n=1}^{k_n} Y_{n,k} \in B\right) &= P\left(\sum_{n=1}^{k_n} Y_{n,k} \in B, \sum_{n=1}^{k_n} Y_{n,k} = \sum_{n=1}^{k_n} Z_{n,k}\right) \\
&\quad + P\left(\sum_{n=1}^{k_n} Y_{n,k} \in B, \sum_{n=1}^{k_n} Y_{n,k} \neq \sum_{n=1}^{k_n} Z_{n,k}\right) \\
&= P\left(\sum_{n=1}^{k_n} Z_{n,k} \in B, \sum Y_{n,k} = \sum Z_{n,k}\right) \\
&\quad + P\left(\sum_{k=1}^n Y_{n,k} \in B, \sum Y_{n,m} = \sum Z_{n,k}\right) \\
&= P\left(\sum_{k=1}^{k_n} Z_{n,k} \in B\right) - P\left(\sum_{k=1}^{k_n} Z_{n,k} \in B, \sum Y_{n,k} \neq \sum Z_{n,k}\right) \\
&\quad + P\left(\sum Y_{n,k} \in B, \sum Y_{n,k} \neq \sum Z_{n,k}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left| P\left(\sum Y_{n,k} \in B\right) - P\left(\sum Z_{n,k} \in B\right) \right| = \\
&= \left| P\left(\sum Z_{n,k} \in B, \sum Y_{n,k} \neq \sum Z_{n,k}\right) - P\left(\sum Y_{n,k} \in B, \sum \neq \sum\right) \right| \\
&\leq P\left(\sum Y_{n,k} \neq \sum Z_{n,k}\right) \leq \sum p_{n,k}^2
\end{aligned}$$

$$\sum Z_{n,k} \sim \text{Poisson}(\sum p_{n,k}) \Leftarrow \text{Poi}(\lambda) \otimes \text{Poi}(\mu) = \text{Poi}(\mu + \lambda)$$

□

Kapitel 7

Bedingte Erwartung und Verteilung

7.1 Definition von bedingten Erweiterungen

(Ω, \mathcal{F}, P) ein W-Raum. $B \in \mathcal{F} : P(B) > 0$

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ bedingte W'keit von A gegeben B}$$

$\Rightarrow P_B$ mit $P_B(A) = P(A|B)$ ist ein W'Maß auf (Ω, \mathcal{F})

$\Rightarrow E_B[X] = E[X \cdot \mathbb{1}_B] / P(B) = E[X|B]$

X, Y unabhängige ZV, f(X, Y) - messbar. Sei $Y_0 : P(Y = y_0) > 0$

$$\begin{aligned} E[f(X, Y)|Y = y_0] &= \frac{E[f(X, Y)\mathbb{1}_{\{Y=y_0\}}]}{P(Y = y_0)} \\ &= \frac{E[f(X, Y_0)\mathbb{1}_{\{Y=y_0\}}]}{P(Y = y_0)} \\ &= E[f(X, Y_0)] \end{aligned}$$

7.1 Definition. Sei $\{A_i\} \subset \mathcal{F}$ mit A_i paarweise disjunkt, $P(A_i) > 0$ für alle $i > 1$, $\mathcal{A} = \sigma(\{A_i\})$ Sei X eine ZV mit $E[|X|] < \infty$. Dann heisst die ZV

$$\tilde{X}(\omega) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E[X\mathbb{1}_{A_i}]}{P(A_i)} \mathbb{1}_{A_i}(\omega)$$

die bedingte Erwartung von X gegeben \mathcal{A} . $X \in L^2$, d.h. $E[X^2] < \infty$
 $E[XY]$ = Skalar-produkt in L^2 . Sei $H_{\mathcal{A}} = \{X \in L^2 : X \text{ ist } \mathcal{A}\text{-number}\}$ Wir wissen, dass $E[X]$ die Funktion $E[(X - a)^2]$ minimiert. Bedingte Erwartung ist eine ZV aus $H_{\mathcal{A}}$ die $E[(X - Y)^2]$ minimiert.

Minimum wird auf der Projektion \tilde{X} von X auf $H_{\mathcal{A}}$ erreicht, d.h.

$$\mathbb{E}[(X - \hat{X})Y] = 0 \quad \forall Y \in H_{\mathcal{A}}$$

$$\begin{aligned} g(Y) &= \mathbb{E}[(X - Y)^2] = \mathbb{E}[(X - \hat{X} + \hat{X} - Y)^2] \\ &= \mathbb{E}[(X - \hat{X})^2 + \mathbb{E}[(X - \hat{X})(\hat{X} - Y)]] \\ &= \mathbb{E}[(\hat{X} - Y)^2] = g(\hat{X}) + 0 + \mathbb{E}[(\hat{X} - Y)^2] \\ &\geq g(\hat{X}) \end{aligned}$$

$$\hat{X} \in H_{\mathcal{A}} \Rightarrow \hat{X} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega), \mathbb{E}[(X - \hat{X})Y] = 0 \quad \forall Y \in H_{\mathcal{A}}.$$

Wähle $Y = \mathbb{1}_{A_i}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X - \mathbb{1}_{A_i}] = \mathbb{E}[\hat{X} \mathbb{1}_{A_i}] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{\infty} a_j \mathbb{1}_{A_j} \mathbb{1}_{A_i}\right] = \mathbb{E}[a_i \mathbb{1}_{A_i}] = a_i P(A_i)$$

$$\Rightarrow a_i = \frac{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_{A_i}]}{P(A_i)}$$

Eigenschaften (der bedingten Erwartung).

- $\mathbb{E}[X|\mathcal{A}] = X$ für jedes X \mathcal{A} -messbar.
- $\mathcal{A} = \{0, \Omega\} \Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{A}] = \mathbb{E}[X]$

7.2 Lemma. 1) $\hat{X} = \mathbb{E}[X|\mathcal{A}]$ ist \mathcal{A} -messbar

$$2) \mathbb{E}[X \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\hat{X} \mathbb{1}_A] \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

Beweis. 1) klar

$$\begin{aligned} 2) A \in \mathcal{A} &\Leftrightarrow \exists \{i_n\} : A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{i_n} \Rightarrow \mathbb{E}[\hat{X} \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}\left[\hat{X} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_{i_n}}\right] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[\hat{X} \mathbb{1}_{A_{i_n}}] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_{A_{i_n}}]}{P(A_{i_n})} \mathbb{1}_{A_{i_n}}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{A_{i_n}}] \mathbb{E}[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{A_{i_n}}] = \\ &= \mathbb{E}[X \mathbb{1}_A] \end{aligned}$$

□

7.3 Lemma. Die Eigenschaften (1), (2) sind zur Definition 7.1 äquivalent.

Beweis. • Definition \Rightarrow Eigenschaften ist schon bewiesen.

- Eigenschaften \Rightarrow Definition 7.1

$$1) \hat{X} - \mathcal{A}\text{-messbar} \Rightarrow \hat{X} \in H_{\mathcal{A}} \quad \hat{X} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbb{1}_{A_i}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ mit } A = \mathcal{A}_i : \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{A_i}] &= \mathbb{E}[\hat{X}\mathbb{1}_{A_i}] = \mathbb{E}[a_i\mathbb{1}_{A_i}] = a_i P(A_i) \\ \Rightarrow a_i &= \frac{\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{A_i}]}{P(A_i)} \end{aligned}$$

□

7.4 Definition. Sei X eine ZV mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$, sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$. Die ZV \hat{X} mit Eigenschaften

1) \hat{X} ist \mathcal{A} -messbar

$$2) \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\hat{X}\mathbb{1}_A] \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

heißt bedingte Erwartung von X gegeben \mathcal{A}

7.5 Satz. Für jede ZV $X \in L^1$ und jede $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ existiert die bedingte Erwartung und ist fast sicher eindeutig.

Beweis. 1. Fall: $X \geq 0$. Definiere $Q : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $Q(A) = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A]$. $\mathbb{E}[|X|] < \infty \Rightarrow Q(A)$ ein endliches Maß und falls $P(A) = 0 \Rightarrow Q(A) = 0 \Rightarrow Q \ll P \Rightarrow$. Nach Radon-Nikodym-Satz \exists eine \mathcal{A} -messbare Funktion $\hat{X} : Q(A) = \int_A \hat{X} dP \quad \forall A \in \mathcal{A}$ \hat{X} ist f.s. eindeutig $= \mathbb{E}[\hat{X}\mathbb{1}_A]$ □

7.2 Eigenschaften von bedingten Erweiterungen

A $X|_{\mathcal{A}}$ -messbar $\Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{A}] = X$ fast sicher

B $\sigma(X)$ und \mathcal{A} unabhängig $\Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{A}] = \mathbb{E}[X]$ fast sicher.

Beweis von B: $\mathbb{E}[X] = \text{const} \Rightarrow \mathbb{E}[X]$ messbar bzgl. $\mathcal{A} \Rightarrow (1)$

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X]\mathbb{1}_A] &= \mathbb{E}[X]P(A) \\ \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] &= \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X]P(A) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X]]\mathbb{1}_A \Rightarrow (2)$$

□

C $\mathbb{E}[aX + bY|\mathcal{A}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{A}] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{A}]$ fast sicher

D $X \leq Y$ fast sicher $\Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{A}] \leq \mathbb{E}[Y|\mathcal{A}]$ fast sicher

Beweis. $\mathbb{E}[\hat{X}\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] \leq \mathbb{E}[Y\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\hat{Y}\mathbb{1}_A]$ für jede Menge $A \in \mathcal{A}$. Dann für $A_\epsilon := \{\hat{X} - \hat{Y} \geq \epsilon\}$ gilt: $0 \geq \mathbb{E}[(\hat{X} - \hat{Y})\mathbb{1}_{A_\epsilon}] \geq \mathbb{E}[\epsilon\mathbb{1}_{A_\epsilon}] = \epsilon P(A_\epsilon) \Rightarrow P(A_\epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0 \Rightarrow P(\hat{X} > \hat{Y}) = 0 \Rightarrow P(\hat{X} \leq \hat{Y}) = 1$ □

E $X_n \geq 0 : X_n \uparrow X$ mit $\mathbb{E}[X] < \infty \Rightarrow \mathbb{E}[X_n|\mathcal{A}] \uparrow \mathbb{E}[X|\mathcal{A}]$

Beweis. $Y_n := X - X_n$, $Y_n \downarrow 0$

Nach Eigenschaft D gilt: $\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{A}]$ ist monoton fallend und $\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{A}] \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}[X_n|\mathcal{A}]$ monoton wachsend und $\leq \mathbb{E}[X|\mathcal{A}] \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n|\mathcal{A}]$ und ist \mathcal{A} -messbar. $\int_A \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y_n|\mathcal{A}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_A \mathbb{E}[Y_n|\mathcal{A}] dP = \int_A Y_n dP \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_A \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n}_{=0} dP \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y_n|\mathcal{A}] = 0 \text{ f.s.} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n|\mathcal{A}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{A}]$

□

F $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{A}]] = \mathbb{E}[X]$

G Falls X \mathcal{A} -messbar, ist $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$, $\mathbb{E}[|XY|] < \infty$, so gilt $\mathbb{E}[XY|\mathcal{A}] = X\mathbb{E}[Y|\mathcal{A}]$

Beweis. $X\mathbb{E}[Y|\mathcal{A}]$ ist \mathcal{A} -messbar \Rightarrow (1). Also müssen wir zeigen, dass

$$\mathbb{E}[XY\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X\mathbb{E}[Y|\mathcal{A}]\mathbb{1}_A] \quad A \in \mathcal{A} \quad (7.1)$$

a. Fall: $X = \mathbb{1}_B$, $B \in \mathcal{A}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XY\mathbb{1}_A] &= \mathbb{E}[Y\mathbb{1}_{A \cap B}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{A}]\mathbb{1}_{A \cap B}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_B \mathbb{E}[Y|\mathcal{A}]] \\ &= \mathbb{E}[X\mathbb{E}[Y|\mathcal{A}]\mathbb{1}_A] \end{aligned}$$

b. Fbll: $X = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{B_i}$, $B_i \in \mathcal{A}$. Dann folgt (*) aus Linearität der bedingten Erwartung.

c. Fcbl: $X, Y \geq 0 \exists \{X_n\}$ an einfachen ZV: $X_n \uparrow X$. Dann (*) für einfache Funktionen folgt

$$\begin{aligned} \int_A XY dP &\leftarrow \int_A X_n Y dP = \int_A X_n \mathbb{E}[Y|\mathcal{A}] dP \rightarrow \int_A X \mathbb{E}[Y|\mathcal{A}] dP \\ &\Rightarrow (*) \end{aligned}$$

d. Fdll: $X = X^+ - X^-$ $Y = Y^+ - Y^-$

□

H (Turmeigenschaft) $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$ - σ -Algebra. Dann gilt: $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{A}_1]|\mathcal{A}_2] = \mathbb{E}[X|\mathcal{A}_1]$

Beweis. Beweis von H: $\mathbb{E}[X|\mathcal{A}_1]$ ist \mathcal{A}_∞ -messbar ZV. Da $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$ so ist $\mathbb{E}[X|\mathcal{A}_1]$ - \mathcal{A}_2 -messbar. Dann nach A: $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{A}_1]|\mathcal{A}_2] = \mathbb{E}[X|\mathcal{A}_\infty]$. Für jedes $A \in \mathcal{A}_1$ gilt:

$$\int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{A}_1] dP = \int_A X dP = \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{A}_2] dP$$

Mit anderen Worten:

$$\mathbb{E} [\mathbb{E} [X|\mathcal{A}_2] \mathbf{1}_A] = \mathbb{E} [\mathbb{E} [X|\mathcal{A}_1] \mathbf{1}_A], \quad A \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E} [\mathbb{E} [X|\mathcal{A}_2] | \mathcal{A}_1] = \mathbb{E} [X|\mathcal{A}_1]$$

Falls $X \in L^2$, so ist $Y \rightarrow \mathbb{E} [(X - Y)^2]$ minimal für $Y = \mathbb{E} [X|\mathcal{A}]$, wobei $Y \in \{\text{alle } \mathcal{A} - \text{messbare ZVn mit der 2.ten ?}\}$

$$|\mathbb{E} [X|\mathcal{A}]| \leq \mathbb{E} [|X| | \mathcal{A}]$$

Sei ϕ eine konvexe Funktion, $\mathbb{E} [|\phi(X)|] < \infty, \mathbb{E} [|X|] < \infty$. Dann

$$\mathbb{E} [\phi(X)|\mathcal{A}] \geq \phi(\mathbb{E} [X|\mathcal{A}]) \text{ fast sicher (Jensen'sche Ungleichung)}$$

$$\text{Beweis. } g_x(y) = \frac{\phi(y) - \phi(x)}{y - x}, y \in \mathbb{Z} \setminus \{x\}$$

1) ϕ -konvex $\Rightarrow g_x(y)$ monoton

2) $D^-(x) = \lim_{y \uparrow x} g_x(y)$ und $D^+(x) = \lim_{y \downarrow x} g_x(y)$ existieren.

$$\begin{aligned} 3) \quad & \phi(y) = \phi(x) + (y - x)g_x(y) \geq \phi(x) + (y - x)D^-(x) \quad y < x \\ & \phi(y) = \phi(x) + (y - x)g_x(y) \geq \phi(x) + (y - x)D^+(x) \quad y > x \\ & \Rightarrow \phi(y) \geq \phi(x) + (y - x)D^+(x) \quad \forall x, y \end{aligned}$$

4) $D^+(x)$ ist monoton (Klenke Satz 7.7) $\Rightarrow D^+(x)$ ist messbar.

$$\begin{aligned} 5) \quad & Y = X \quad x = \mathbb{E} [X|\mathcal{A}] \Rightarrow \phi(x) \geq \phi(\mathbb{E} [X|\mathcal{A}]) + (X - \mathbb{E} [X|\mathcal{A}])D^+(\mathbb{E} [X|\mathcal{A}]) \\ & \xrightarrow{\text{Monotonie}} \mathbb{E} [\phi(X)|\mathcal{A}] \geq \phi(\mathbb{E} [X|\mathcal{A}]) + \mathbb{E} [(X - \mathbb{E} [X|\mathcal{A}])D^+(\mathbb{E} [X|\mathcal{A}])] \\ & \text{Nach 4) ist } D^+(\mathbb{E} [X|\mathcal{A}]) \mathcal{A}\text{-messbar. Dann } \mathbb{E} [(X - \mathbb{E} [X|\mathcal{A}])D^+(\mathbb{E} [X|\mathcal{A}])|\mathcal{A}] = \\ & D^+(\mathbb{E} [X|\mathcal{A}])\mathbb{E} [(X - \mathbb{E} [X|\mathcal{A}])|\mathcal{A}] = D^+(\mathbb{E} [X|\mathcal{A}])\underbrace{(\mathbb{E} [X|\mathcal{A}] - \mathbb{E} [\mathbb{E} [X|\mathcal{A}] | \mathcal{A}])}_{= \mathbb{E} [X|\mathcal{A}]} = \\ & 0 \end{aligned}$$

□

7.6 Definition. $\mathbb{E} [X|Y] = \mathbb{E} [X|\sigma(Y)]$

7.7 Satz. Ist X eine $\sigma(Y)$ -messbare ZV, so existiert eine messbare Funktion $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $X = \phi(Y)$.

Beweis. i. Schritt $X = \mathbf{1}_A, A \in \sigma(Y) \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A = Y^{-1}(B)$
Definiere $\phi = \mathbf{1}_B \quad X = \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{Y^{-1}(B)} = \mathbf{1}_{Y \in B} = \phi(Y)$

ii. Schritt X ist eine einfache Funktion. $X = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{1}_{A_i}, A_i \in \sigma(Y), \phi = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{1}_{B_i}$ wobei $A_i = Y^{-1}(B_i)$

iii. Schritt X ist beliebig $\Rightarrow \{X_n\}$ von einfachen Funktionen, so dass $X_n \rightarrow X$. Nach 2. Schritt, \exists Folge $\{\phi_n\}$, so dass $X_n = \phi_n(Y)$.

iv. Schrivtt Defniere $B = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x) \text{ existiert}\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und definiere $\phi(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x), & x \in B \\ 0, & x \in B^c \end{cases}$ ist messbare $\Rightarrow X = \phi(Y)$

□

7.8 Definition. Sei $\phi = \mathbb{E}[X|Y] = \phi(Y)$. Dann $\phi(Y)$ heißt der bedingte Erwartungswert von X gegeben $\{Y = y\}$

$$\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X|Y = y]_{|y=Y}$$

7.3 Bedingte Verteilungen

7.9 Definition. $P(B|Y = y) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B|Y = y]$ heißt bedingte Wahrscheinlichkeit von B gegeben $\{Y = y\}$ $P(B|\mathcal{A}) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B|\mathcal{A}]$ heißt bedingte Wahrscheinlichkeit von B gegeben \mathcal{A}

$P(B|\mathcal{A})(\omega), P(\cdot|\mathcal{A})(\omega)$ ein W'Maß ist? Sei $\{B_i\}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen. Dann $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i|\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^n P(B_i|\mathcal{A})$ fast sicher. $\Leftrightarrow \exists$ Nullmenge $N(\{B\}) : P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i|\mathcal{A})(\omega) = \sum_{i=1}^n P(B_i|\mathcal{A})(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega \setminus N(\{B_i\})$

7.10 Definition. Die Funktion $P(\omega, B)$ heißt reguläre Version der bedingten W'keit gegeben \mathcal{A} falls:

- a) Für jedes $\Omega \ni \omega$ ist $P(\omega, \cdot)$ ein W'Maß auf (Ω, \mathcal{F})
- b) Für jedes $B \in \mathcal{F}$ ist $P(\cdot, B)$ eine Version $P(B|\mathcal{A})$

7.11 Definition. Sei X eine reelle ZV. Die Funktion $P(\omega, A)$ heißt reguläre Version der bedingten Verteilung von X gegeben \mathcal{A} , falls

- a) Für jedes $\omega \in \Omega$ ist $P(\omega, \cdot)$ ein W'Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
- b) Für jedes $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist $P(\cdot, A)$ eine Version von $P(X \in A|\mathcal{A})$

Seien (X,Y) ZVen mit gemeinsamer Verteilung, die absolut stetig bzgl. $\lambda \otimes \mu$ ist. Die Dichte $f(x, y)$

$$P((x, y) \in A) = \int_A f(x, y) \lambda \times \mu(dx, dy), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

Klar, dass $f_y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \lambda(dx)$ die Dichte von y bzgl. μ ist. Definiere $f_{X|Y}(X|Y) = \begin{cases} \frac{f(x, y) f_y(y)}{f_y(y)} & \text{falls } f_y(y) > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ Dann gilt: $P(X \in B|Y = y) = \int_B f_{X|Y}(X|Y) \lambda dx$

Beweis Obige Aussage. Aus der Definition von bedingten W'keiten folgt, dass $P(X \in B | Y = y)$ durch folgende Gleichheit definiert ist:

$$P(X \in B, Y \in C) = \int_C P(X \in B | Y = y) P_Y(dy)$$

$$\begin{aligned} \int_C \left(\int_B f_{X|Y}(X|Y) \lambda(dx) \right) f_Y(y) \mu(dy) &= \int_B \left(\int_C f_{x|y}(x|y) f_y(y) \mu(dy) \right) \lambda(dx) \\ &= \int_{B \times C} f(x, y) \lambda \otimes \mu(dx, dy) \\ &= P((x, y) \in B \times C) = P(x \in B, y \in C) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[g(x) | Y = y] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_{X|Y}(X|Y) \lambda(dx)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[g(x) | Y] = \left(\int_{\mathbb{R}} g(x) f_{X|Y}(x|y) \lambda(dx) \right) |_{y=Y}$$

□

7.12 Satz. Für jede reellwertige ZV X existiert die reguläre Version der bedingten Verteilung von X gegeben \mathcal{A} (ohne Beweis)

7.13 Satz. Sei $P(\omega, B)$ die reguläre Version von der bedingten W'keit gegeben \mathcal{A} und sei $x \in L^1$. Dann gilt:

$$\mathbb{E}[X | \mathcal{A}](\omega) = \int_{\Omega} X(\omega) P(\omega, d\omega') \text{ f.s.}$$

Beweis. übung

□

Kapitel 8

Martingale

8.1 Definition. Eine monoton wachsende Folge $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots$ von σ -Algebren heißt Filtration. Ferner eine Folge von ZVen (M_n) heißt adaptiert an die Filtration (\mathcal{F}_n) falls für jedes $n \geq 0$ M_n \mathcal{F}_n -messbar ist.

8.2 Definition. Eine Folge von ZV (M_n) heißt $\left\{ \begin{array}{l} \text{Martingal} \\ \text{Supermartingal} \\ \text{Submartingal} \end{array} \right\}$ bzgl.

Filtration \mathcal{F}_n , falls:

M1 (M_n) ist an \mathcal{F}_n adaptiert

M2 $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty, \forall n \geq 0$

M3 $\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] \left\{ \begin{array}{l} = \\ \leq \\ \geq \end{array} \right\}$

8.3 Bemerkung. • (M_n) ist Supermartingal $\Leftrightarrow (M_n)$ Submartingal

• (M_n) ist Martingal $\Leftrightarrow (M_n)$ Submartingal und Supermartingal

8.4 Beispiel. Seien (X_i) unabhängige ZVen mit $\mathbb{E}[|X_i|] < \infty \forall i \geq 1$ Definiere $M_0 = 0, M_1 = \sum_{i=1}^n X_i, n \geq 1$ und $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n), n \geq 1$

1. Dann ist (M_n) ein $\left\{ \begin{array}{l} \text{Martingal} \\ \text{Supermartingal} \\ \text{Submartingal} \end{array} \right\}$ bzgl. $\mathcal{F}_n \Leftrightarrow \mathbb{E}[X_i] \left\{ \begin{array}{l} = \\ \leq \\ \geq \end{array} \right\} \forall i \geq 1$

Beweis. M1) $H_0 = 0$ ist \mathcal{F}_0 -messbar, X_n ist \mathcal{F}_n -messbar, falls $k \leq n$
 $\Rightarrow \sum_{k=1}^n X_k$ ist \mathcal{F}_n -messbar.

M2) $(M_n) \leq \sum_{k=1}^n |X_k| \Rightarrow \mathbb{E}[|M_n|] \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|X_k|]$

M3)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[M_n + X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\ &= {}^1M_n + \mathbb{E}[X_{n+1}] \left\{ \begin{array}{l} = \\ \leq \\ \geq \end{array} \right\} M_n\end{aligned}$$

□

Roulette:

- Am Anfang setzt der Spieler 1 € auf Rot
- Hat er verloren, so setzt er 2 € auf Rot
- Hat er wieder verloren, setzt er 4 € auf Rot
usw.

Halbmathematisches Modell: (X_N) unabhängige ZVen mit $P(X_n = \pm 2^k) = \frac{1}{2}$ (X_n ist der Gewinn in der n-ten Runde). Definiere $M_n = \sum_{k=1}^n X_k$ (= Gesamtgewinn in erster n-Spieler). Definiere $T = (\inf_{min})\{k \geq 1 : x_k > 0\}$

$$\boxed{M_T = 1} \quad \mathbb{E}[T] = \infty$$

8.5 Lemma. Ist (M_n) ein Martingal bzgl. (\mathcal{F}_n) , so ist M_n ein Martingal bzgl. $(\sigma(M_0, M_1, \dots, M_n))$

Beweis. M1) ist $\sigma(M_0, M_1, \dots, M_n)$ -messbar

M2) $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty$

M3) M_k \mathcal{F}_n -messbar und $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_n \forall k \leq n \Rightarrow M_n$ ist \mathcal{F}_n -messbar $\forall k \leq n$
 $\Rightarrow \sigma(M_0, M_1, \dots, M_n) \subseteq \mathcal{F}_n \forall n \geq 1$ $\mathbb{E}[M_{n+1}|\sigma(M_0, M_1, \dots, M_n)] =$
 $E[\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]|\sigma(M_0, M_1, \dots, M_n)] = {}^2\mathbb{E}[M_n|\sigma(M_0, M_1, \dots, M_n)] =$
 M_n

□

8.6 Bemerkung. Wenn man “ (M_n) ist ein Martingal” ohne Angabe der Filtration (\mathcal{F}_N) sagt, so meint man “ (M_n) ist Martingal bzgl. $\sigma(M_0, M_1, \dots, M_n)$ ”

8.7 Lemma. Sei (M_n) ein $\left\{ \begin{array}{l} \text{Martingal} \\ \text{Supermartingal} \\ \text{Submartingal} \end{array} \right\}$ so gilt: $\mathbb{E}[M_{n+1}] \left\{ \begin{array}{l} = \\ \leq \\ \geq \end{array} \right\} \mathbb{E}[M_n] \quad \forall n \geq$

0

$$\text{Beweis. } \mathbb{E}[M_{n+1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]] \left\{ \begin{array}{l} = \\ \leq \\ \geq \end{array} \right\} \mathbb{E}[M_n]$$

□

²Turmeigenschaft

8.8 Lemma. Ist (M_n) ein Martingal bzgl. (\mathcal{F}_n) so gilt: $\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_i] = M_i$ $i \leq n$

Beweis. $i = n$ $\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_n] = M_n$

$i = n - 1$ $\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1}$ nach (M_3)

$i \rightarrow i - 1$: Sei $\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_i] = M_i$ schon bewiesen $\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{i-1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_i]|\mathcal{F}_{i-1}] =$
 $\mathbb{E}[M_i|\mathcal{F}_{i-1}] \stackrel{M_3}{=} M_{i-1}$

□

8.9 Lemma. Sei (M_n) ein Martingal bzgl. (\mathcal{F}) . Ferner sei ϕ eine konvexe Funktion ($\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$). Ist $\mathbb{E}[|\phi(M_n)|] < \infty \forall n \geq 0$ so ist $(\phi(M_n))$ ein Submartingal.

Beweis. (M_1) und (M_2) sind klar. $(M_3) : \mathbb{E}[\phi(M_{n+1})|\mathcal{F}_n] \geq \phi(\underbrace{\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]}_{M_n})$

□

8.10 Bemerkung. Der Beweis vom Lemma zeigt auch die Aussage: Ist (M_n) ein Submartingal und ϕ ist eine konvexe, monoton wachsende Funktion mit $\mathbb{E}[|\phi(M_n)|] < \infty \forall n \geq 1$, so ist $(\phi(M_n))_{n \geq 0}$ ein Submartingal.

8.11 Beispiel. Wenn (M_n) Martingal ist, dann sind (M_n^2) , $(|M_n|)$ und (M_n^+) Submartingale, falls die entsprechende Interaktionsbedingung erfüllt ist.

8.12 Beispiel. Ein Anleger kauft M_0 Aktien einer Firma. W_0 = Wert der Aktien beim Kauf. Y_n = Kurs einer Aktie n Tage nach dem Kauf W_n = Wert von Aktien n Tagen nach dem Kauf M_n = Anzahl der Aktien im Besitz des Anlegers zwischen Zeitpunkten $(n-1)$ und n

Forderung M_n ist $\sigma(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1})$ -messbar. Es ist einfach zu sehen:

$W_n = W_{n-1} + M_n(Y_n - Y_{n-1})$ Falls (Y_n) ein $\left\{ \begin{array}{l} \text{Martingal} \\ \text{Supermartingal} \\ \text{Submartingal} \end{array} \right\}$ ist, so

gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_n] &= \mathbb{E}[W_{n-1}] + \mathbb{E}[M_n(Y_n - Y_{n-1})] \\ &= \mathbb{E}[W_{n-1}] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_n(Y_n - Y_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}]] = \mathbb{E}[W_{n-1}] + \mathbb{E}[M_n \mathbb{E}[(Y_n - Y_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}]] \end{aligned}$$

8.13 Definition. Die Folge $(M_n)_{n \geq 1}$ heißt previsibel bzgl. (\mathcal{F}_n) , falls M_n \mathcal{F}_{n-1} -messbar ist, $n \geq 1$

8.14 Satz. Sei (Y_n) ein Supermartingal bzgl. (\mathcal{F}_n) . Falls (M_n) [previsibel bzgl. (\mathcal{F}_n) ist, und $0 \leq H_n \leq c_n$, dann ist

$$\left((H - Y)_n := \sum_{i=1}^n M_i(Y_i - Y_{i-1}) \right)_{n \geq 0} \quad \text{ein Supermartingal}$$

Beweis. (M_1) und (M_2) klar.
 (M_3) :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(HY)_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[(HY)_n + H_{n+1}(Y_{n+1} - Y_n)|\mathcal{F}_n] \\ &= (HY)_n H_{n+1} \underbrace{\mathbb{E}[(Y_{n+1} - Y_n)|\mathcal{F}_n]}_{\leq 0} \leq (HY)_n\end{aligned}$$

□

8.15 Bemerkung. Satz 8.14 lässt sich für Submartingale und Martingaleformulieren. Im letzteren Fall reicht es $|M_n| \leq c_n$ zu fordern.

8.16 Definition. Eine ZV $T : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ heißt Stoppzeit bzgl. (\mathcal{F}_n) , falls $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n \forall n \in \mathbb{N}_0$ ($\Leftrightarrow \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \forall n \in \mathbb{N}_0$)

8.17 Beispiel. Sei (M_n) irgendeine Folge von ZVen und sei $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dann ist $T = \inf\{k \geq 0 : M_k \in A\}$ eine SZ.

Beweis. $\{T = 0\} = \{H_0 \in A\} \in \sigma(M_0)$ Für jedes $k \leq 1$ $\{T = k\} = \{M_0 = A^c, M_1 = A^c, \dots, M_{n-1}A^c, M_n \in A\} \subset \sigma(M_0, M_1, \dots, M_n)$ □

8.18 Satz. Ist die Folge (M_n) ein Supermartingal und T eine SZ bzgl. derselben Filtration (\mathcal{F}_n) , dann ist $(M_{T \wedge n})_{n \geq 0}$ ein Supermartingal (mit $a \wedge b = \min\{a, b\}$)

Beweis. $H_n := \mathbb{1}_{T \geq n}$

$\{T \geq n\} = \left(\underbrace{\{T \leq n-1\}}_{\in \mathcal{F}_{n-1}} \right)^c \in \mathcal{F}_{n-1} \Rightarrow H_n$ ist \mathcal{F}_{n-1} -messbar H_n ist previsibel

$$\begin{aligned}(H - M)_n &= \sum_{i=1}^n H_i(M_i - M_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{T \geq i\}} M_i - \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{T \geq i\}} M_{i-1} \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{T \geq i\}} M_i - \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{T \geq j+1\}} M_j = \\ &= \mathbb{1}_{\{T \geq n\}} H_n + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\underbrace{\mathbb{1}_{\{T \geq i\}} - \mathbb{1}_{\{T \geq i+1\}}}_{\mathbb{1}_{\{T=i\}}} \right) M_i - \mathbb{1}_{\{T \geq 1\}} M_0 \\ &= \mathbb{1}_{\{T \geq n\}} H_n + \sum_{i=1}^{n-1} M_i \mathbb{1}_{T=i} - M_0 \underbrace{\mathbb{1}_{\{T \geq 1\}}}_{=1 - \mathbb{1}_{T=0}} \\ &= \mathbb{1}_{\{T \geq n\}} H_n + \sum_{i=0}^n M_i \mathbb{1}_{\{T=i\}} - M_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{T \wedge n} - M_0 &= M_{T \wedge n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{T=i\}} + \mathbb{1}_{\{T \geq n\}} \right) - M_0 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} M_{T \wedge n} \mathbb{1}_{T=i} + M_{T \wedge n} \mathbb{1}_{\{T \geq n\}} - M_0 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} M_i \mathbb{1}_{\{T=i\}} + M_n \mathbb{1}_{\{T \geq n\}} - M_0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow M_{T \wedge n} - M_0 = (MM)_n - M_0$ $n \geq 0$ Da $0 \leq H_n \leq 1$ nach Satz 8.14 ist die Folge $(MH)_n$ ein Supermartingal $\Rightarrow M_{T \wedge n} - M_0$ ist ein Supermartingal $\Rightarrow (M_{T \wedge n})$ ist supermartingal. \square

8.1 Fast sichere Konvergenz von Martingalen

Sei (M_n) ein Submartingal, $a < b \in \mathbb{R}$ $N_0 = -1$

$N_{2n-1} = \inf\{i > N_{2n-2} : M_i \leq a\}$

$N_{2n} = \inf\{i > N_{2n-1} : M_i \geq b\}$ für alle $n \geq 1$

$M_{N_{2k-1}} \leq a \& M_{N_{2k}} \geq b \forall k \geq 1$

Wir werden sagen, dass (M_n) zwischen N_{2n-1} und N_{2n} die n-te Aufkreuzung über Intervall (a, b) hat. Setze $U_n = \sup\{k \geq 0 : N_{2k} \leq n\}$ = Anzahl von Aufkreuzungen bis zum Zeitpunkt n.

8.19 Satz. Ist (M_n) ein Submartingal, so gilt $\mathbb{E}[U_n] \leq \frac{\mathbb{E}[(M_n - a)^+] - \mathbb{E}[(M_n - a)^+]}{b - a}$

Beweis. $\phi(x) := a + (x - a)^+$ ϕ ist monoton wachsend und konvex. Dann, nach 8.10, ist $(Y_n := a + (M_n + a)^+)_{n \geq 0}$ ein Submartingal. Ausserdem, (M_n) und (Y_n) haben die gleiche Anzahl von Aufkreuzungen über (a, b) . Definiere $H_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } N_{2k-1} \leq i \leq N_{2k} \text{ für ein } k \geq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ Es gilt: $(b - a)U_n \leq (HY)_n \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[U_n] &\leq \frac{\mathbb{E}[MY_n]}{(b-a)} \quad (MY)_n = \sum_{i=1}^n M_i(Y_i - Y_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (Y_i - Y_{i-1}) = \\
&= \sum_{i=1}^n (1 - M_i)(Y_i - Y_{i-1}) = Y_n - Y_0 - ((1 - M)Y)_n \quad \text{Ausserdem gilt: } \{1 - M_i = 0\} = \{M_i = 1\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{N_{2k-1} < i < N_{2k}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\{N_{2k-1} < i - 1\} \cap \{N_{2n} > i - 1\}) \\
&\Rightarrow M_n \text{ ist previsibel bzgl } (\mathcal{F}_n) \xrightarrow{\text{Satz 8.14}} ((1 - M)Y)_m \text{ ist Submartingal} \\
&\xrightarrow{\text{Lemma 8.7}} \mathbb{E}[(1 - M)Y_n] \geq \mathbb{E}[(1 - H)Y_n] = 0 \Rightarrow \mathbb{E}[(HY)_n] = \mathbb{E}[Y_n] - \\
&\mathbb{E}[Y_0] - \mathbb{E}[(1 - M)Y_n] \leq \mathbb{E}[Y_n] - \mathbb{E}[Y_0] = \mathbb{E}[(M_n - a)^+] - \mathbb{E}[(M - a)^+] \quad \square
\end{aligned}$$

8.20 Satz (Martingal Konvergenzsatz). Sei (M_n) ein Submartingal mit $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[M_n^+] < \infty$. Dann konvergiert M_n f.s. gegen eine ZV M_∞ mit $\mathbb{E}[|M_\infty|] < \infty$

Beweis. $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

$$\mathbb{E}[U_n] \leq \frac{\mathbb{E}[M_n^+] + |a|}{b - a} ((M_n + a)^+ \leq M_n^+ + |a|, \mathbb{E}[(M_0 - a)^+] > 0)$$

$U_n \uparrow U \in [0, \infty]$ Nach Satz von Monotoner Konvergenz

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[U_n] \leq \sup_n \frac{\mathbb{E}[M_n^+] + |a|}{b-a} < \infty \\ &\Rightarrow u < \infty \text{ f.s. } (P(u = \infty) = 0) \\ &\Rightarrow P\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} M_n \leq a < b \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} M_n\right) = 0 \\ &\Rightarrow P\left(\bigcup_{a < b \in \mathbb{Q}} \{\liminf_{n \rightarrow \infty} M_n \leq a < b \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} M_n\}\right) = 0 \\ &\Rightarrow P(\liminf M_n < \limsup M_n) = 0 \\ &\Rightarrow P(\liminf M_n = \limsup M_n) = 1 \\ &\Rightarrow M_n \text{ konvergiert f.s. } M_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} M_n \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[M_\infty^+] = \mathbb{E}[\lim M_n^+] = \mathbb{E}[\liminf M_n] \stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \liminf \mathbb{E}[M_n^+] < \infty$$

$$\mathbb{E}[M_\infty^-] \leq \liminf \mathbb{E}[M_n^-]$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[M_n^-] = \mathbb{E}[M_n^+] - \mathbb{E}[M_n] \leq \mathbb{E}[M_n^+] - \mathbb{E}[M_0] \Rightarrow \sup_n \mathbb{E}[M_n^-] < \infty$$

□

8.21 Korollar. Ist (M_n) ein Supermartingal mit $M_n \geq 0 \forall n \geq 0$, so konvergiert M_n gegen einen Grenzwert M_∞ fast sicher und $\mathbb{E}[M_\infty] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[M_n] \leq M_0$

Beweis. $(-M_n)_{n \geq 0}$ ist ein Submartingal. $(-M_n)^+ = 0$ wegen $M_n \geq 0 \Rightarrow \sup_{n \geq 0} (-M_n)^+ = 0 < \infty$ Nach Martingalkonvergenzsatz: $M_n \xrightarrow{\text{fast sicher}} M_\infty$.

Nach Fatou-Lemma:

$$\mathbb{E}[M_\infty] = \mathbb{E}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} M_n\right] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[M_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[M_n] \leq \mathbb{E}[M_0]$$

konvergiert M_n gegen M_∞ auch in L_1 ? (X_i) iid ZV mit $P(X_1 = \pm 1) = \frac{1}{2}$, $S_0 = 1, S_n = 1 + \sum_{k=1}^n x_k, n \geq 1$ $(S_n)_{n \geq 0}$ ist ein Martingal. $N := \inf\{k \geq 1 : S_k = 0\}$ ist eine Stoppzeit. $\xRightarrow{\text{Satz 8.18}}$ ist ein Martingal, dazu ≥ 0 . Nach Korollar 8.21 $S_{N \wedge n} \rightarrow M_\infty$ f.s. $P(M_\infty = 0) = 1 \Rightarrow \mathbb{E}[M_\infty] = 0$ Aber $\mathbb{E}[S_{N \wedge n}] = 1 \forall n \geq 1$. □

8.22 Beispiel (Polya Urne). $r = \#$ rote Kugeln, $b = \#$ blaue Kugeln, $R_n = \#$ Anzahl von roten Kugeln, nach der n -ten Ziehung. Behauptung $M_n = \frac{r+R_n}{r+b+n}$ Martingal.

Beweis. $\mathcal{F}_n = \sigma(R_0, R_1, \dots, R_n)$

M1) $M_n = \frac{r+R_n}{r+b+n} = \phi_n(R_n)$ – messbar bzgl. $\sigma(R_0, R_1, \dots, R_n)$

M2) $0 \leq M_n \leq 1 \Rightarrow M_n \in L^1$

M3)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1} | R_1 = r_1, R_2 = r_2, \dots, R_n = r_n] &= \mathbb{E}\left[\frac{r + R_{n+1}}{r + b + n + 1} \mid R_i = r_i \forall i \in [1, n]\right] \\ &= \frac{r + R_n}{r + b + n + 1} + \mathbb{E}\left[\frac{R_{n+1} - r_n}{r + b + n + 1} \mid R_i = r_i \forall i \in [1, n]\right] \\ &= \frac{r + R_n}{r + b + n + 1} + \frac{1}{r + b + n + 1} \frac{r + R_n}{r + b + n} + \frac{0}{r + b + n + 1} \frac{b}{r} \\ &= \frac{r + R_n}{r + b + n + 1} \left[1 + \frac{1}{r + b + n}\right] = \frac{r + R_n}{r + b + n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[M_{n+1} | R_0, R_1, \dots, R_n] = \mathbb{E}[M_{n+1} | R_i = r_i \forall i \in [1, n]]_{|_{r_i=R_i \forall i \in [1, n]}} = \\ &= \frac{r+R_n}{r+b+n} = M_n \Rightarrow \text{Nach Korollar 8.21 } M_n \xrightarrow{\text{f.s.}} M_\infty \text{ Man kann zeigen, dass} \\ f_{M_\infty}(x) &= \frac{(r+b-1)!}{(r-1)!(b-1)!} x^{r-1} (1-x)^{b-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \end{aligned}$$

□

8.2 Martingalungleichungen

8.23 Satz. Sei (M_n) ein Submartingal und T eine beschränkte Stoppzeit, d.h. $\exists n \geq 1 : P(T \leq n) = 1$. Dann gilt:

$$\mathbb{E}[M_0] \leq \mathbb{E}[M_T] \leq \mathbb{E}[M_n]$$

Beweis. Nach Satz 8.18 ist $(M_{T \wedge i})_{i \geq 0}$ ein Submartingal.

$$\Rightarrow \mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_{T \wedge 0}] \leq \mathbb{E}[M_{T \wedge n}] = \mathbb{E}[M_T]$$

$H_i = \mathbb{1}_{\{T \leq i-1\}}, i \geq 1$. Dies ist eine previsible Folge. Nach Satz 8.14 ist $((H \circ M)_k)_{k \geq 0}$ ein Submartingal

$$\begin{aligned} (H \circ M)_K &= \sum_{i=1}^K H_i (M_i - M_{i-1}) = \sum_{i=1}^K \mathbb{1}_{\{T \leq i-1\}} M_i - \sum_{i=1}^{K-1} \mathbb{1}_{\{T \leq i\}} M_i \\ &= M_K \mathbb{1}_{\{T \leq K-1\}} - M_0 \mathbb{1}_{\{T \leq 0\}} - \sum_{i=1}^{K-1} M_i \mathbb{1}_{\{T=i\}} \\ &= M_K \mathbb{1}_{\{T \leq K-1\}} - \sum_{i=0}^{K-1} M_i \mathbb{1}_{\{T=i\}} \\ &= M_K - M_K \mathbb{1}_{\{T > K-1\}} - \sum_{i=0}^{K-1} M_i \mathbb{1}_{\{T=i\}} = M_K - M_{T \wedge K} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_n] - \mathbb{E}[M_t] &= \mathbb{E}[M_n - M_T] = \mathbb{E}[M_n] - \mathbb{E}[T \wedge n] = \mathbb{E}[(H \circ M)_n] \geq \\ \mathbb{E}[(H \circ M)_0] &= 0 \end{aligned} \quad \square$$

8.24 Satz (Doob'sche Ungleichung). *Sei M_n ein Submartingal. Dann gilt:*

$$P(\max_{k \leq n} M_k^+ \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \mathbb{E} \left[M_n \mathbf{1}_{\{\max_{k \leq n} M_k^+ \geq \lambda\}} \right] \leq \frac{\mathbb{E}[M_n^+]}{\lambda} \forall \lambda > 0, \forall n \geq 1$$

Beweis. $A = \{\max_{k \leq n} M_k^+ \geq \lambda\}$ $N = \inf\{i \geq 0 : M_i^+ \geq \lambda\}$

$$\begin{aligned} \lambda P(A) &\leq \mathbb{E}[M_{N \wedge n} \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[M_{N \wedge n}] - \mathbb{E}[M_{N \wedge n} \mathbf{1}_{A^c}] \\ &\stackrel{\text{Satz 8.23}}{\leq} \mathbb{E}[M_n] - \mathbb{E} \left[\underbrace{M_{N \wedge n}}_{=M_n} \mathbf{1}_{A^c} \right] = \mathbb{E}[M_n(1 - \mathbf{1}_{A^c})] \\ &= \mathbb{E}[M_n \mathbf{1}_A] \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[M_n \mathbf{1}_A] \leq \mathbb{E}[M_n^+] \quad \square$$

8.25 Beispiel. Seien $(X_i)_{i \geq 1}$ unabhängige ZVen mit $\mathbb{E}[X_i] = 0$ und $\sigma_i^2 = \mathbb{E}[X_i^2] < \infty$. Dann gilt:

$$P\left(\max_{k \leq n} |S_k| \geq \lambda\right) \leq \frac{\sum_{k=1}^n \sigma_i^2}{\lambda^2} = \frac{\text{Var}[S_n]}{\lambda}$$

S_n -Martingal $\Rightarrow |S_n|$ submartingal $\Rightarrow S_n^2$ -Submartingal

8.26 Satz. *Ist $(M_n)_{n \geq 0}$ ein Submartingal, dann gilt für jedes $p \in (1, \infty)$ die Ungleichung:*

$$\mathbb{E} \left[\left(\max_{k \leq n} M_k^+ \right)^p \right] \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E} [| (M_n^+)^p |]$$

8.27 Korollar. *Ist M_n ein Martingal, so gilt:*

$$\mathbb{E} \left[\left(\max_{k \leq n} M_k \right)^p \right] \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E} [| (M_n)^p |]$$

Beweis von Satz 8.26. $\overline{M}_n := \max_{k \leq n} M_k^+$. Für alle $C > 0$ gilt:

$$\mathbb{E} \left[(\overline{M}_n \wedge C)^p \right] = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} P(\overline{M}_n \wedge C > \lambda) d\lambda$$

$$\{\overline{M}_n \wedge C > \lambda\} = \begin{cases} \emptyset, & C < \lambda \\ \{\overline{M}_n > \lambda\}, & C \geq \lambda \end{cases} \quad P(\overline{M}_n \geq \lambda) \leq {}^3\mathbb{E} \left[M_n^+ \mathbb{1}_{\{\overline{M}_n \geq \lambda\}} \right]$$

$$\Rightarrow P(\overline{M}_n \wedge C > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \mathbb{E} \left[M_n^+ \mathbb{1}_{\{\overline{M}_n \wedge C > \lambda\}} \right]$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[(\overline{M}_n \wedge C)^p] \leq p \int_0^\infty \lambda^{p-2} \mathbb{E} \left[M_n^+ \mathbb{1}_{\{\overline{M}_n \wedge C > \lambda\}} \right] d\lambda$$

$$\stackrel{Fub.}{=} \mathbb{E} \left[M_n^+ \int_0^\infty p \lambda^{p-2} \mathbb{1}_{\{\overline{M}_n \wedge C > \lambda\}} d\lambda \right]$$

$$= \mathbb{E} \left[M_n^+ \int_0^{\overline{M}_n \wedge C} p \lambda^{p-2} d\lambda \right] = \mathbb{E} \left[M_n^+ \left(\frac{p}{p-1} \right) (\overline{M}_n \wedge C)^{p-1} \right] \leq {}^4 \leq \frac{p}{p-1} \mathbb{E}[(M_n^+)^p] \stackrel{1}{p}$$

wobei $q : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow q = \frac{p}{p-1} \Rightarrow \mathbb{E}[(\overline{M}_n \wedge C)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1} \right) \mathbb{E}[(M_n^+)^p]^{\frac{1}{p}} \mathbb{E}[(\overline{M}_n \wedge C)^p]^{\frac{p-1}{p}}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[(\overline{M}_n \wedge C)^p]^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E}[(M_n^+)^p] \mathbb{E}[(\overline{M}_n \wedge C)^p]^{p-1} \Rightarrow \mathbb{E}[(\overline{M}_n \wedge C)^p] \leq$$

$$\left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E}[(M_n^+)^p] \text{ Nach monotoner Konvergenz: } \mathbb{E}[(\overline{M}_n)^p] = \lim_{c \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(\overline{M}_n \wedge C)^p] \leq$$

$$\left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E}[(M_n^+)^p] \quad \square$$

8.28 Satz (L^p -Konvergenz für Martingale). *Sei (M_n) ein Martingal und sei $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[|M_n|^p] < \infty$ für ein $p > 1$. Dann konvergiert M_n gegen M_∞ f.s. und in L^p*

Beweis. $\mathbb{E}[M_n^+] \leq \mathbb{E}[|M_n|] \leq (\mathbb{E}[|M_n|^p])^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[M_n^+] < \infty \Rightarrow {}^5 M_n \xrightarrow{\text{f.s.}}$

$$M_\infty \mathbb{E} \left[\underbrace{\left(\max_{k \leq n} |M_k| \right)^p}_{\max_{k \leq n} |M_k| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq 1} |M_k|} \right] \leq 6 \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E}[|M_n|^p] \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[|M_n|^p] =$$

$$\text{const}(p) < \infty \Rightarrow {}^7 \mathbb{E}[(\sup_{k \geq 1} |M_k|)^p] \leq \text{const}(p) < \infty \Rightarrow \sup_{k \geq 1} |M_k| \in L^p$$

$$\Rightarrow |M_n - M_\infty|^p < |M_n|^p + |M_\infty|^\infty \quad \square$$

8.3 Optimal Stopping

Ist (M_n) ein Submartingal, so gilt:

- 1) $\mathbb{E}[M_k] \leq \mathbb{E}[M_n] \quad \forall k \leq n$
- 2) $\mathbb{E}[M_T] \leq \mathbb{E}[M_n]$ falls $P(T \leq n) = 1$

8.29 Satz. *Sei Γ eine Stoppzeit*

³Doob'sche Ungleichung

⁵Martingal Konvergenz-Satz

⁶Korollar 8.27

⁷monotone Konvergenz

a) (M_n) ein gleichmäßiges int-bares Submartingal
oder

b) $\mathbb{E}[|M_T|] < \infty$ und $(M_n \mathbf{1}_{T \leq n})_{n \geq 0}$ ist gleichmäßig intbar. Dann ist $(M_{T \wedge n})_{n \geq 0}$ auch gleichmäßig integrierbar.

Beweis. a) χ^+ ist konvex und monoton wachsend $\Rightarrow (M_n^+)$ ist ein Submartingal Aus (2) $\Rightarrow \mathbb{E}[M_{T \wedge n}^+] \leq \mathbb{E}[M_n^+] \quad \forall n \geq 0$ Da (M_n) gleichmäßig integrierbar ist, ist auch (M_n^+) gleichmäßig integrierbar $\Rightarrow \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[M_n^+] < \infty \Rightarrow \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[M_{T \wedge n}^+] \leq \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[M_n^+] < \infty$ Nach Martingalkonvergenzsatz konvergiert $M_{T \wedge n}$ für $n \rightarrow \infty$:

$$M_{T \wedge n} \rightarrow M_T \text{ fast sicher \& } \mathbb{E}[|M_T|] < \infty$$

Für jedes $k > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|M_{T \wedge n}| \mathbf{1}_{\{|M_{T \wedge n}| > k\}}] &= \mathbb{E}[|M_{T \wedge n}| \mathbf{1}_{\{|M_{T \wedge n}| > k\}} \mathbf{1}_{\{T \leq n\}}] \\ &\quad + \mathbb{E}[|M_{T \wedge n}| \mathbf{1}_{\{|M_{T \wedge n}| > k\}} \mathbf{1}_{\{T > n\}}] \quad (*) \\ &\leq \mathbb{E}[|M_T| \mathbf{1}_{\{|M_T| > k\}}] + \mathbb{E}[|M_n| \mathbf{1}_{\{|M_n| > k\}}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[|M_{T \wedge n}| \mathbf{1}_{\{|M_{T \wedge n}| > k\}}] &\leq \underbrace{\mathbb{E}[|M_T| \mathbf{1}_{\{|M_T| > k\}}]}_{\rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty, \text{ weil } \mathbb{E}[|M_T|] < \infty} \\ &\quad + \underbrace{\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[|M_n| \mathbf{1}_{\{|M_n| > k\}}]}_{\rightarrow 0 \text{ weil } (M_n) \text{ gleichm. integrierbar}} \end{aligned}$$

b) Aus (*) folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|M_{T \wedge n}| \mathbf{1}_{\{|M_{T \wedge n}| > k\}}] &\leq \mathbb{E}[|M_T| \mathbf{1}_{\{|M_T| > k\}}] \\ &\quad + \mathbb{E}[|M_n| \mathbf{1}_{\{|M_n| > k\}} \mathbf{1}_{\{|M_n| \mathbf{1}_{\{T > n\}} > k\}}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[|M_{T \wedge n}| \mathbf{1}_{\{|M_{T \wedge n}| > k\}}] &\leq \underbrace{\mathbb{E}[|M_n| \mathbf{1}_{\{|M_n| > k\}}]}_{\rightarrow 0} \\ &\quad + \underbrace{\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[|M_n| \mathbf{1}_{\{T > n\}} \mathbf{1}_{\{|M_n| \mathbf{1}_{\{T > n\}} > k\}}]}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

□

8.30 Satz. Sei (M_n) ein gleichmäßig integrierbares Submartingal. Für jede Stoppzeit T gilt:

$$\mathbb{E}[M_0] \leq \mathbb{E}[M_T] \leq \mathbb{E}[M_\infty]$$

Beweis. Nach Satz 8.23 gilt:

$$\mathbb{E}[M_0] \leq \mathbb{E}[M_{T \wedge n}] \leq \mathbb{E}[M_n] \quad \forall n \geq 0$$

Nach Satz 8.35 ist $(M_{T \wedge n})$ ein gleichmäßig integrierbares Submartingal. Nach Satz 8.31:

$$\begin{aligned} M_n &\xrightarrow[L_\perp]{\text{fast sicher}} M_\infty \quad \& \quad M_{T \wedge n} \xrightarrow[L_\perp]{\text{fast sicher}} M_T \\ \Rightarrow \mathbb{E}[M_n] &\rightarrow \mathbb{E}[M_\infty] \quad \& \quad \mathbb{E}[M_{T \wedge n}] \rightarrow \mathbb{E}[M_T] \\ \mathbb{E}[M_0] &\leq \mathbb{E}[M_{T \wedge n}] \leq \mathbb{E}[M_n] \quad \forall n \geq 0 \\ \Rightarrow \downarrow &\quad \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbb{E}[M_0] &\leq \mathbb{E}[M_T] \leq \mathbb{E}[M_\infty] \end{aligned}$$

□

8.31 Satz (Optimal Stopping). *Seien $S \leq T$ Stoppzeiten und sei $(M_{T \wedge n})$ ein gleichmäßig integrierbares Submartingal. Dann gilt:*

a) $\mathbb{E}[M_S] \leq \mathbb{E}[M_T]$

b) $M_S \leq \mathbb{E}[M_T | \mathcal{F}_S]$, wobei $\mathcal{F}_S = \{A : A \cap \{S = n\} \in \mathcal{F}_n \forall n\}$

8.32 Bemerkung. \mathcal{F}_s ist eine σ -Algebra

Beweis. Wir wenden Satz 8.36 mit $\tilde{M}_n = M_{T \wedge n}$ und $\tilde{T} = S$:

$$\mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[\tilde{M}_0] \leq \underbrace{\mathbb{E}[\tilde{M}_{\tilde{T}}]}_{\mathbb{E}[M_{T \wedge S}] = \mathbb{E}[M_S]} \leq \mathbb{E}[\tilde{M}_\infty] = \mathbb{E}[M_T]$$

\Rightarrow (a) ist bewiesen. Sei $A \in \mathcal{F}_S$.

$$\text{Definiere } U(\omega) = \begin{cases} S(\omega), & \text{falls, } \omega \in A \\ T(\omega), & \text{falls, } \omega \in A^c \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \{U = n\} &= (\{U = n\} \cap A) \cup (\{U = n\} \cap A^c) \\ &= \underbrace{\left(\underbrace{\{S = n\} \cap A}_{\in \mathcal{F}_n} \right)}_{\in \mathcal{F}_n} \cup \underbrace{\left(\underbrace{\{T = n\} \cap A^c}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{S \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \right)}_{\in \mathcal{F}_n} \end{aligned}$$

Ausserdem gilt: $U = T$. Dann folgt aus a): $\mathbb{E}[M_S \mathbf{1}_A] + \mathbb{E}[M_T \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[M \cup \mathbf{1}_A] + \mathbb{E}[M \cup \mathbf{1}_{A^c}] \leq \mathbb{E}[M_T] \mathbb{E}[M_T \mathbf{1}_A] + \mathbb{E}[M_T \mathbf{1}_{A^c}] \Rightarrow \mathbb{E}[M_S \mathbf{1}_A] \leq \mathbb{E}[M_T \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_T \mathbf{1}_A | \mathcal{F}_S]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_T | \mathcal{F}_S] \mathbf{1}_A] \forall A \in \mathcal{F}_S \Rightarrow {}^8 M_S \leq \mathbb{E}[M_T | \mathcal{F}_S]$ Dann $\epsilon P(A_\epsilon) = \int_{A_\epsilon} (M_S - \mathbb{E}[M_T | \mathcal{F}_S]) dP \leq 0 \Rightarrow P(A_\epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0 \Rightarrow M_S \leq \mathbb{E}[M_T | \mathcal{F}_S]$ fast sicher □

⁸ $A_\epsilon = \{M_S - \mathbb{E}[M_T | \mathcal{F}_S] \geq \epsilon\} \in \mathcal{F}_S$

8.33 Beispiel. Die Irrfahrt auf \mathbb{Z} . Sei $p \in (0, 1)$ und X_i iid ZVen. mit $P(X_1 = 1) = p$, $P(X_1 = -1) = 1 - p$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. ($S_n, n \geq 0$) einfache Irrfahrt auf \mathbb{Z}
Mit Startpunkt x : $S_n = x + \sum_{i=1}^n X_i$, $n \geq 0$

8.34 Lemma. $M_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}$ ist ein Martingal

Beweis. $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n), n \geq 0$

$$\text{M1)} \quad M_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{x + \sum_{i=1}^n X_i}$$

M2)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_n] &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{x + \sum_{i=1}^n X_i}\right] \\ &= \left(\frac{1-p}{p}\right)^x \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n \left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_i}\right] = \left(\frac{1-p}{p}\right)^x \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_i}\right] \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_i}\right] = \left(\frac{1-p}{p}\right)^1 p + \left(\frac{1-p}{p}\right)^{-1} (1-p) = 1$$

M3)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}\left[M_n \left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_{n+1}} | \mathcal{F}_n\right] \\ &= M_n \mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_{n+1}} | \mathcal{F}_n\right] = M_n \mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_{n+1}}\right] = M_n \end{aligned}$$

Seien $a < x < b \in \mathbb{Z}$ $\tau_a := \min\{k \geq 1 : x + S_k < a\}$ $\tau_b := \min\{k \geq 1 : x + S_k > b\}$ $T = \tau_a \wedge \tau_b = \min\{k \geq 1 : x + S_k \notin [a, b]\}$

□

8.35 Satz. $p \neq \frac{1}{2}$, $a < x < b \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$P(\tau_a \leq \tau_b) = \frac{Q^x - Q^b}{Q^a - Q^b}, \quad Q = \frac{1-p}{p}$$

Beweis. $P(T < \infty) = 1$ Gesetz der großen Zahlen $x \in [a, b] \Rightarrow |S|_{T \wedge n} \leq \max\{|a|, |b|\} \Rightarrow (M_{T \wedge n})_{n \geq 0} = (Q^{S_{T \wedge n}})_{n \geq 0}$ sind beschränkt. $\Rightarrow (M_{T \wedge n})_{n \geq 0}$

ist gleichmäßig integrierbar. \Rightarrow Aus dem Satz 8.36 folgt, dass:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-p}{p}\right)^x &= \mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_T] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{x+\sum_{i=1}^T X_i} \mathbb{1}_{\{\tau_a < \tau_b\}}\right] + \mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{x+\sum_{i=1}^T X_i} \mathbb{1}_{\{\tau_a > \tau_b\}}\right] \\ &= \left(\frac{1-p}{p}\right)^a P(\tau_a < \tau_b) + \left(\frac{1-p}{p}\right)^b P(\tau_a > \tau_b) \end{aligned}$$

$$Q^x = Q^a P(\tau_a < \tau_b) + Q^b (1 - P(\tau_a < \tau_b)) \quad Q^x - Q^b = (Q^a - Q^b) P(\tau_a < \tau_b) \quad \square$$

8.36 Satz. Für die symmetrische $(p = \frac{1}{2})$ Irrfahrt und $a < x_0 < b$ gilt:

$$1) \quad P(\tau_a < \tau_b) = \frac{b}{b-a}$$

$$2) \quad \mathbb{E}[T] = -ab_0$$

Beweis. S_n ist ein Martingal

1) Wegen $S_0 = 0 \in [a, b]$ gilt: $a \leq S_{T \wedge n} \leq b \Rightarrow (S_{T \wedge n})_{n \geq 0}$ gleichmäßig integrierbares Martingal $\Rightarrow 0 = \mathbb{E}[S_0] = \mathbb{E}[S_T] = aP(\tau_a < \tau_b) + \underbrace{bP(\tau_a > \tau_b)}_{1-P(\tau_a < \tau_b)}$

2) $(S_n^2 - n)_{n \geq 0}$ ein Martingal. Sei $N \in \mathbb{N}$ fest, definiere $\tilde{T} = T \wedge N$

$$\left| S_{\tilde{T} \wedge n}^2 - \tilde{T} \wedge n \right| \leq \max\{|S_{\tilde{T} \wedge n}^2|, \tilde{T} \wedge n\} \leq \max\{a^2, b^2, N\}$$

$\Rightarrow (S_{\tilde{T} \wedge n}^2 - \tilde{T})_{n \geq 0}$ ein gleichmäßig integrierbares Martingal. Aus dem Optional Stopping Satz:

$$\begin{aligned} 0 = \mathbb{E}[S_T^2 - T] &= \underbrace{\mathbb{E}[S_{T \wedge n}^2]}_{\substack{\text{beschr. Konvergenz} \\ \rightarrow \mathbb{E}[S_T^2]}} - \underbrace{\mathbb{E}[T \wedge n]}_{\substack{\text{monotone Konvergenz} \\ \rightarrow \mathbb{E}[T]}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[S_T^2]$$

$$\mathbb{E}[S_T^2] = a^2 P(\tau_a < \tau_b) + b^2 P(\tau_a > \tau_b) \quad \text{Hier fehlt eine Zeile}$$

\square

8.4 Verzweigungsprozesse