

Kapitel 7

Bedingte Erwartung und Verteilung

7.1 Definition von bedingten Erweiterungen

(Ω, \mathcal{F}, P) ein W-Raum. $B \in \mathcal{F} : P(B) > 0$

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ bedingte W'keit von A gegeben B}$$

$\Rightarrow P_B$ mit $P_B(A) = P(A|B)$ ist ein W'Maß auf (Ω, \mathcal{F})

$\Rightarrow E_B[X] = E[X \cdot \mathbf{1}_B] / P(B) = E[X|B]$

X, Y unabhängige ZV, $f(X, Y)$ - messbar. Sei $Y_0 : P(Y = y_0) > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X, Y)|Y = y_0] &= \frac{\mathbb{E}[f(X, Y)\mathbf{1}_{\{Y=y_0\}}]}{P(Y = y_0)} \\ &= \frac{\mathbb{E}[f(X, Y_0)\mathbf{1}_{\{Y=y_0\}}]}{P(Y = y_0)} \\ &= \mathbb{E}[f(X, Y_0)] \end{aligned}$$

7.1 Definition. Sei $\{A_i\} \subset \mathcal{F}$ mit A_i paarweise disjunkt, $P(A_i) > 0$ für alle $i > 1$, $\mathcal{A} = \sigma(\{A_i\})$ Sei X eine ZV mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Dann heisst die ZV

$$\tilde{X}(\omega) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{A_i}]}{P(A_i)} \mathbf{1}_{A_i}(\omega)$$

die bedingte Erwartung von X gegeben \mathcal{A} . $X \in L^2$, d.h. $\mathbb{E}[X^2] < \infty$
 $\mathbb{E}[XY]$ = Skalarprodukt in L^2 . Sei $H_{\mathcal{A}} = \{X \in L^2 : X \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar}\}$ Wir wissen, dass $\mathbb{E}[X]$ die Funktion $\mathbb{E}[(X - a)^2]$ minimiert. Bedingte Erwartung ist eine ZV aus $H_{\mathcal{A}}$ die $\mathbb{E}[(X - Y)^2]$ minimiert.

Minimum wird auf der Projektion \hat{X} von X auf $H_{\mathcal{A}}$ erreicht, d.h.

$$\mathbb{E}[(X - \hat{X})Y] = 0 \quad \forall Y \in H_{\mathcal{A}}$$

$$\begin{aligned} g(Y) &= \mathbb{E}[(X - Y)^2] = \mathbb{E}[(X - \hat{X} + \hat{X} - Y)^2] \\ &= \mathbb{E}[(X - \hat{X})^2 + \mathbb{E}[(X - \hat{X})(\hat{X} - Y)]] \\ &= \mathbb{E}[(\hat{X} + \hat{Y})^2] = g(\hat{X}) + 0 + \mathbb{E}[(\hat{X} - Y)^2] \\ &\geq g(\hat{X}) \end{aligned}$$

$$\hat{X} \in H_{\mathcal{A}} \Rightarrow \hat{X} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbf{1}_{A_i}(\omega), \mathbb{E}[(X - \hat{X})Y] = 0 \quad \forall Y \in H_{\mathcal{A}}.$$

Wähle $Y = \mathbf{1}_{A_i}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X - \mathbf{1}_{A_i}] = \mathbb{E}[\hat{X} \mathbf{1}_{A_i}] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{\infty} a_j \mathbf{1}_{A_j} \mathbf{1}_{A_i}\right] = \mathbb{E}[a_i \mathbf{1}_{A_i}] = a_i P(A_i)$$

$$\Rightarrow a_i = \frac{\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{A_i}]}{P(A_i)}$$

Eigenschaften (der bedingten Erwartung).

- $\mathbb{E}[X|\mathcal{A}] = X$ für jedes X \mathcal{A} -messbar.
- $\mathcal{A} = \{0, \Omega\} \Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{A}] = \mathbb{E}[X]$

7.2 Lemma. 1) $\hat{X} = \mathbb{E}[X|\mathcal{A}]$ ist \mathcal{A} -messbar

$$2) \mathbb{E}[X \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[\hat{X} \mathbf{1}_A] \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

Beweis. 1) klar

$$\begin{aligned} 2) A \in \mathcal{A} &\Leftrightarrow \exists \{i_n\} : A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{i_n} \Rightarrow \mathbb{E}[\hat{X} \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}\left[\hat{X} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_{i_n}}\right] = \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[\hat{X} \mathbf{1}_{A_{i_n}}] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{A_{i_n}}]}{P(A_{i_n})} \mathbf{1}_{A_{i_n}}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{A_{i_n}}] \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{A_{i_n}}\right] = \\ &\mathbb{E}[X \mathbf{1}_A] \end{aligned}$$

□

7.3 Lemma. Die Eigenschaften (1), (2) sind zur Definition 7.1 äquivalent.

Beweis. • Definition \Rightarrow Eigenschaften ist schon bewiesen.

- Eigenschaften \Rightarrow Definition 7.1

$$1) \hat{X} - \mathcal{A}\text{-messbar} \Rightarrow \hat{X} \in H_{\mathcal{A}} \hat{X} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbf{1}_{A_i}$$

$$2) \text{ mit } A = \mathcal{A}_i : \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{A_i}] = \mathbb{E}[\hat{X}\mathbb{1}_{A_i}] = \mathbb{E}[a_i\mathbb{1}_{A_i}] = a_i P(A_i)$$

$$\Rightarrow a_i = \frac{\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{A_i}]}{P(A_i)}$$

□

7.4 Definition. Sei X eine ZV mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$, sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$. Die ZV \hat{X} mit Eigenschaften

- 1) \hat{X} ist \mathcal{A} -messbar
- 2) $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\hat{X}\mathbb{1}_A] \quad \forall A \in \mathcal{A}$

heißt bedingte Erwartung von X gegeben \mathcal{A}

7.5 Satz. Für jede ZV $X \in L^1$ und jede $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ existiert die bedingte Erwartung und ist fast sicher eindeutig.

Beweis. 1. Fall: $X \geq 0$. Definiere $Q : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $Q(A) = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A]$. $\mathbb{E}[|X|] < \infty \Rightarrow Q(A)$ ein endliches Maß und falls $P(A) = 0 \Rightarrow Q(A) = 0 \Rightarrow Q \ll P \Rightarrow$. Nach Radon-Nikodym-Satz \exists eine \mathcal{A} -messbare Funktion $\hat{X} : Q(A) = \int_A \hat{X} dP \quad \forall A \in \mathcal{A}$ \hat{X} ist f.s. eindeutig = $\mathbb{E}[\hat{X}\mathbb{1}_A]$ □

7.2 Eigenschaften von bedingten Erweiterungen

- A $X\mathcal{A}$ -messbar $\Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{A}] = X$ fast sicher
- B $\sigma(X)$ und \mathcal{A} unabhängig $\Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{A}] = \mathbb{E}[X]$ fast sicher.

Beweis von B.: $\mathbb{E}[X] = \text{const} \Rightarrow \mathbb{E}[X]$ messbar bzgl. $\mathcal{A} \Rightarrow (1)$

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{A}]\mathbb{1}_A] &= \mathbb{E}[X]P(A) \\ \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] &= \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X]P(A) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{A}]\mathbb{1}_A] \Rightarrow (2)$$

□

- C $\mathbb{E}[aX + bY|\mathcal{A}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{A}] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{A}]$ fast sicher
- D $X \leq Y$ fast sicher $\Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{A}] \leq \mathbb{E}[Y|\mathcal{A}]$ fast sicher

Beweis. $\mathbb{E}[\hat{X}\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] \leq \mathbb{E}[Y\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\hat{Y}\mathbb{1}_A]$ für jede Menge $A \in \mathcal{A}$. Dann für $A_\epsilon := \{\hat{X} - \hat{Y} \geq \epsilon\}$ gilt: $0 \geq \mathbb{E}[(\hat{X} - \hat{Y})\mathbb{1}_{A_\epsilon}] \geq \mathbb{E}[\epsilon\mathbb{1}_{A_\epsilon}] = \epsilon P(A_\epsilon) \Rightarrow P(A_\epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0 \Rightarrow P(\hat{X} > \hat{Y}) = 0 \Rightarrow P(\hat{X} \leq \hat{Y}) = 1$ □

- E $X_n \geq 0 : X_n \uparrow X$ mit $\mathbb{E}[X] < \infty \Rightarrow \mathbb{E}[X_n|\mathcal{A}] \uparrow \mathbb{E}[X|\mathcal{A}]$

Beweis. $Y_n := X - X_n, Y_n \downarrow 0$

Nach Eigenschaft D gilt: $\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{A}]$ ist monoton fallend und $\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{A}] \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}[X_n|\mathcal{A}]$ monoton wachsend und $\leq \mathbb{E}[X|\mathcal{A}] \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n|\mathcal{A}]$ und ist \mathcal{A} -messbar. $\int_A \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y_n|\mathcal{A}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_A \mathbb{E}[Y_n|\mathcal{A}] dP = \int_A Y_n dP \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_A \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n}_{=0} dP \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y_n|\mathcal{A}] = 0$ f.s. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n|\mathcal{A}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{A}]$

□

F $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{A}]] = \mathbb{E}[X]$

G Falls X \mathcal{A} -messbar, ist $\mathbb{E}[|Y|] < \infty, \mathbb{E}[|XY|] < \infty$, so gilt $\mathbb{E}[XY|\mathcal{A}] = X\mathbb{E}[Y|\mathcal{A}]$

Beweis. $X\mathbb{E}[Y|\mathcal{A}]$ ist \mathcal{A} -messbar \Rightarrow (1). Also müssen wir zeigen, dass

$$\mathbb{E}[XY\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X\mathbb{E}[Y|\mathcal{A}]\mathbf{1}_A] \quad A \in \mathcal{A} \quad (7.1)$$

a. Fall: $X = \mathbf{1}_B, B \in \mathcal{A}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XY\mathbf{1}_A] &= \mathbb{E}[Y\mathbf{1}_{A \cap B}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{A}]\mathbf{1}_{A \cap B}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_B \mathbb{E}[Y|\mathcal{A}]] \\ &= \mathbb{E}[X\mathbb{E}[Y|\mathcal{A}]\mathbf{1}_A] \end{aligned}$$

b. Fbll: $X = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{1}_{B_i}, B_i \in \mathcal{A}$. Dann folgt (*) aus Linearität der bedingten Erwartung.

c. Fcbl: $X, Y \geq 0 \exists \{X_n\}$ an einfachen ZV: $X_n \uparrow X$. Dann (*) für einfache Funktionen folgt

$$\begin{aligned} \int_A XY dP &\leftarrow \int_A X_n Y dP = \int_A X_n \mathbb{E}[Y|\mathcal{A}] dP \rightarrow \int_A X \mathbb{E}[Y|\mathcal{A}] dP \\ &\Rightarrow (*) \end{aligned}$$

d. Fdll: $X = X^+ - X^-, Y = Y^+ - Y^-$

□

H (Turmeigenschaft) $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 - \sigma$ -Algebra. Dann gilt: $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{A}_1]|\mathcal{A}_2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{A}_2]|\mathcal{A}_1] = \mathbb{E}[X|\mathcal{A}_1]$

Beweis. Beweis von H: $\mathbb{E}[X|\mathcal{A}_1]$ ist \mathcal{A}_∞ -messbar ZV. Da $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$ so ist $\mathbb{E}[X|\mathcal{A}_1] - \mathcal{A}_2$ -messbar. Dann nach A: $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{A}_1]|\mathcal{A}_2] = \mathbb{E}[X|\mathcal{A}_\infty]$. Für jedes $A \in \mathcal{A}_1$ gilt:

$$\int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{A}_1] dP = \int_A X dP = \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{A}_2] dP$$

Mit anderen Worten:

$$\mathbb{E} [\mathbb{E} [X|\mathcal{A}_2] \mathbf{1}_A] = \mathbb{E} [\mathbb{E} [X|\mathcal{A}_1] \mathbf{1}_A], \quad A \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E} [\mathbb{E} [X|\mathcal{A}_2] | \mathcal{A}_1] = \mathbb{E} [X|\mathcal{A}_1]$$

Falls $X \in L^2$, so ist $Y \rightarrow \mathbb{E} [(X - Y)^2]$ minimal für $Y = \mathbb{E} [X|\mathcal{A}]$, wobei $Y \in \{\text{alle } \mathcal{A} - \text{messbare ZVn mit der 2.ten ?}\}$

$$|\mathbb{E} [X|\mathcal{A}]| \leq \mathbb{E} [|X| | \mathcal{A}]$$

Sei ϕ eine konvexe Funktion, $\mathbb{E} [|\phi(X)|] < \infty, \mathbb{E} [|X|] < \infty$. Dann

$$\mathbb{E} [\phi(X)|\mathcal{A}] \geq \phi(\mathbb{E} [X|\mathcal{A}]) \text{ fast sicher (Jensen'sche Ungleichung)}$$

Beweis. $g_x(y) = \frac{\phi(y) - \phi(x)}{y - x}, y \in \mathbb{Z} \setminus \{x\}$

- 1) ϕ -konvex $\Rightarrow g_x(y)$ monoton
- 2) $D^-(x) = \lim_{y \uparrow x} g_x(y)$ und $D^+(x) = \lim_{y \downarrow x} g_x(y)$ existieren.
- 3) $\phi(y) = \phi(x) + (y - x)g_x(y) \geq \phi(x) + (y - x)D^-(x) \quad y < x$
 $\phi(y) = \phi(x) + (y - x)g_x(y) \geq \phi(x) + (y - x)D^+(x) \quad y > x$
 $\Rightarrow \phi(y) \geq \phi(x) + (y - x)D^+(x) \quad \forall x, y$
- 4) $D^+(x)$ ist monoton (Klenke Satz 7.7) $\Rightarrow D^+(x)$ ist messbar.
- 5) $Y = X \quad x = \mathbb{E} [X|\mathcal{A}] \Rightarrow \phi(x) \geq \phi(\mathbb{E} [X|\mathcal{A}]) + (X - \mathbb{E} [X|\mathcal{A}])D^+(\mathbb{E} [X|\mathcal{A}])$
 $\xrightarrow{\text{Monotonie}} \mathbb{E} [\phi(X)|\mathcal{A}] \geq \phi(\mathbb{E} [X|\mathcal{A}]) + \mathbb{E} [(X - \mathbb{E} [X|\mathcal{A}])D^+(\mathbb{E} [X|\mathcal{A}])]$
 Nach 4) ist $D^+(\mathbb{E} [X|\mathcal{A}])$ \mathcal{A} -messbar. Dann $\mathbb{E} [(X - \mathbb{E} [X|\mathcal{A}])D^+(\mathbb{E} [X|\mathcal{A}])|\mathcal{A}] =$
 $D^+(\mathbb{E} [X|\mathcal{A}])\mathbb{E} [(X - \mathbb{E} [X|\mathcal{A}])|\mathcal{A}] = D^+(\mathbb{E} [X|\mathcal{A}])\underbrace{(\mathbb{E} [X|\mathcal{A}] - \mathbb{E} [\mathbb{E} [X|\mathcal{A}] | \mathcal{A}])}_{= \mathbb{E} [X|\mathcal{A}]} =$
 0

□

7.6 Definition. $\mathbb{E} [X|Y] = \mathbb{E} [X|\sigma(Y)]$

7.7 Satz. Ist X eine $\sigma(Y)$ -messbare ZV, so existiert eine messbare Funktion $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $X = \phi(Y)$.

- Beweis.*
- i.Schritt $X = \mathbf{1}_A, A \in \sigma(Y) \quad A \in \sigma(Y) \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A = Y^{-1}(B)$
 Definiere $\phi = \mathbf{1}_B \quad X = \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{Y^{-1}(B)} = \mathbf{1}_{Y \in B} = \phi(Y)$
 - ii.Schritt X ist eine einfache Funktion. $X = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{1}_{A_i}, A_i \in \sigma(Y), \phi = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{1}_{B_i}$ wobei $A_i = Y^{-1}(B_i)$
 - iii.Schritt X ist beliebig $\Rightarrow \{X_n\}$ von einfachen Funktionen, so dass $X_n \rightarrow X$. Nach 2. Schritt, \exists Folge $\{\phi_n\}$, so dass $X_n = \phi_n(Y)$.

iv. Schritt Definiere $B = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) \text{ existiert}\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und definiere $\phi(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x), & x \in B \\ 0, & x \in B^c \end{cases}$ ist messbare $\Rightarrow X = \phi(Y)$

□

7.8 Definition. Sei $\phi = \mathbb{E}[X|Y] = \phi(Y)$. Dann $\phi(Y)$ heißt der bedingte Erwartungswert von X gegeben $\{Y = y\}$

$$\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X|Y = y] |_{y=Y}$$

7.3 Bedingte Verteilungen

7.9 Definition. $P(B|Y = y) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B|Y = y]$ heißt bedingte Wahrscheinlichkeit von B gegeben $\{Y = y\}$ $P(B|\mathcal{A}) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B|\mathcal{A}]$ heißt bedingte Wahrscheinlichkeit von B gegeben \mathcal{A}

$P(B|\mathcal{A})(\omega), P(\cdot|\mathcal{A})(\omega)$ ein W'Maß ist? Sei $\{B_i\}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen. Dann $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i|\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|\mathcal{A})$ fast sicher. $\Leftrightarrow \exists$ Nullmenge $N(\{B_i\}) : P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i|\mathcal{A})(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|\mathcal{A})(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega \setminus N(\{B_i\})$

7.10 Definition. Die Funktion $P(\omega, B)$ heißt reguläre Version der bedingten W'keit gegeben \mathcal{A} falls:

- Für jedes $\Omega \ni \omega$ ist $P(\omega, \cdot)$ ein W'Maß auf (Ω, \mathcal{F})
- Für jedes $B \in \mathcal{F}$ ist $P(\cdot, B)$ eine Version $P(B|\mathcal{A})$

7.11 Definition. Sei X eine reelle ZV. Die Funktion $P(\omega, A)$ heißt reguläre Version der bedingten Verteilung von X gegeben \mathcal{A} , falls

- Für jedes $\omega \in \Omega$ ist $P(\omega, \cdot)$ ein W'Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
- Für jedes $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist $P(\cdot, A)$ eine Version von $P(X \in A|\mathcal{A})$

Seien (X, Y) ZVen mit gemeinsamer Verteilung, die absolut stetig bzgl. $\lambda \otimes \mu$ ist. Die Dichte $f(x, y)$

$$P((x, y) \in A) = \int_A f(x, y) \lambda \times \mu(dx, dy), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

Klar, dass $f_y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \lambda(dx)$ die Dichte von y bzgl. μ ist. Definiere $f_{X|Y}(X|Y) = \begin{cases} \frac{f(x, y) f_y(y)}{f_y(y)} & \text{falls } f_y(y) > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ Dann gilt: $P(X \in B|Y = y) = \int_B f_{X|Y}(X|Y) \lambda dx$

Beweis Obige Aussage. Aus der Definition von bedingten W'keiten folgt, dass $P(X \in B|Y = y)$ durch folgende Gleichheit definiert ist:

$$P(X \in B, Y \in C) = \int_C P(X \in B|Y = y) P_Y(dy)$$

$$\begin{aligned} \int_C \left(\int_B f_{X|Y}(X|Y) \lambda(dx) \right) f_Y(y) \mu(dy) &= \int_B \left(\int_C f_{x|y}(x|y) f_y(y) \mu(dy) \right) \lambda(dx) \\ &= \int_{B \times C} f(x, y) \lambda \otimes \mu(dx, dy) \\ &= P((x, y) \in B \times C) = P(x \in B, y \in C) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[g(x)|Y = y] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_{X|Y}(X|Y) \lambda(dx)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[g(x)|Y] = \left(\int_{\mathbb{R}} g(x) f_{X|Y}(x|y) \lambda(dx) \right) \Big|_{y=Y}$$

□

7.12 Satz. Für jede reellwertige ZV X existiert die reguläre Version der bedingten Verteilung von X gegeben \mathcal{A} (ohne Beweis)

7.13 Satz. Sei $P(\omega, B)$ die reguläre Version von der bedingten W'keit gegeben \mathcal{A} und sei $x \in L^1$. Dann gilt:

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{A}](\omega) = \int_{\Omega} X(\omega') P(\omega, d\omega') \text{ f.s.}$$

Beweis. übung

□

Kapitel 8

Martingale

8.1 Definition. Eine monoton wachsende Folge $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots$ von σ -Algebren heißt Filtration. Ferner eine Folge von ZVen (M_n) heißt adaptiert an die Filtration (\mathcal{F}_n) falls für jedes $n \geq 0$ M_n \mathcal{F}_n -messbar ist.

8.2 Definition. Eine Folge von ZV (M_n) heißt $\left\{ \begin{array}{l} \text{Martingal} \\ \text{Supermartingal} \\ \text{Submartingal} \end{array} \right\}$ bzgl.

Filtration \mathcal{F}_n , falls:

M1 (M_n) ist an \mathcal{F}_n adaptiert

M2 $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty, \forall n \geq 0$

M3 $\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] \left\{ \begin{array}{l} = \\ \leq \\ \geq \end{array} \right\}$

8.3 Bemerkung. • (M_n) ist Supermartingal $\Leftrightarrow (M_n)$ Submartingal

• (M_n) ist Martingal $\Leftrightarrow (M_n)$ Submartingal und Supermartingal

8.4 Beispiel. Seien (X_i) unabhängige ZVen mit $\mathbb{E}[|X_i|] < \infty \forall i \geq 1$ Definiere $M_0 = 0, M_1 = \sum_{i=1}^n X_i, n \geq 1$ und $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n), n \geq 1$

1. Dann ist (M_n) ein $\left\{ \begin{array}{l} \text{Martingal} \\ \text{Supermartingal} \\ \text{Submartingal} \end{array} \right\}$ bzgl. $\mathcal{F}_n \Leftrightarrow \mathbb{E}[X_i] \left\{ \begin{array}{l} = \\ \leq \\ \geq \end{array} \right\} \forall i \geq 1$

Beweis. M1) $H_0 = 0$ ist \mathcal{F}_0 -messbar, X_n ist \mathcal{F}_n -messbar, falls $k \leq n$
 $\Rightarrow \sum_{k=1}^n X_n$ ist \mathcal{F}_n -messbar.

M2) $(M_n) \leq \sum_{k=1}^n |X_k| \Rightarrow \mathbb{E}[|M_n|] \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|X_n|]$

M3)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[M_n + X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\ &= {}^1M_n + \mathbb{E}[X_{n+1}] \left\{ \begin{array}{l} = \\ \leq \\ \geq \end{array} \right\} M_n \end{aligned}$$

□

Roulette:

- Am Anfang setzt der Spieler 1 € auf Rot
- Hat er verloren, so setzt er 2 € auf Rot
- Hat er wieder verloren, setzt er 4 € auf Rot
usw.

Halbmathematisches Modell: (X_N) unabhängige ZVen mit $P(X_n = \pm 2^k) = \frac{1}{2}$ (X_n ist der Gewinn in der n-ten Runde). Definiere $M_n = \sum_{k=1}^n X_k$ (= Gesamtgewinn in erster n-Spieler). Definiere $T = (\inf_{min})\{k \geq 1 : x_k > 0\}$

$$\boxed{M_T = 1} \quad \mathbb{E}[T] = \infty$$

8.5 Lemma. Ist (M_n) ein Martingal bzgl (\mathcal{F}_n) , so ist M_n ein Martingal bzgl $(\sigma(M_0, M_1, \dots, M_n))$

Beweis. M1) ist $\sigma(M_0, M_1, \dots, M_n)$ -messbar

M2) $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty$

M3) M_k \mathcal{F}_n -messbar und $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_n \forall k \leq n \Rightarrow M_n$ ist \mathcal{F}_n -messbar $\forall k \leq n$
 $\Rightarrow \sigma(M_0, M_1, \dots, M_n) \subseteq \mathcal{F}_n \forall n \geq 1$ $\mathbb{E}[M_{n+1}|\sigma(M_0, M_1, \dots, M_n)] =$
 $E[\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]|\sigma(M_0, M_1, \dots, M_n)] = {}^2\mathbb{E}[M_n|\sigma(M_0, M_1, \dots, M_n)] =$
 M_n

□

8.6 Bemerkung. Wenn man “ (M_n) ist ein Martingal” ohne Angabe der Filtration (\mathcal{F}_N) sagt, so meint man “ (M_n) ist Martingal bzgl. $\sigma(M_0, M_1, \dots, M_n)$ ”

8.7 Lemma. Sei (M_n) ein $\left\{ \begin{array}{l} \text{Martingal} \\ \text{Supermartingal} \\ \text{Submartingal} \end{array} \right\}$ so gilt: $\mathbb{E}[M_{n+1}] \left\{ \begin{array}{l} = \\ \leq \\ \geq \end{array} \right\} \mathbb{E}[M_n] \forall n \geq$

0

Beweis. $\mathbb{E}[M_{n+1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]] \left\{ \begin{array}{l} = \\ \leq \\ \geq \end{array} \right\} \mathbb{E}[M_n]$

□

²Turmeigenschaft

8.8 Lemma. Ist (M_n) ein Martingal bzgl. (\mathcal{F}_n) so gilt: $\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_i] = M_i$ $i \leq n$

Beweis. $i = n$ $\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_n] = M_n$

$i = n - 1$ $\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1}$ nach (M_3)

$i \rightarrow i - 1$: Sei $\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_i] = M_i$ schon bewiesen $\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{i-1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_i]|\mathcal{F}_{i-1}] = \mathbb{E}[M_i|\mathcal{F}_{i-1}] \stackrel{M_3}{=} M_{i-1}$

□

8.9 Lemma. Sei (M_n) ein Martingal bzgl. (\mathcal{F}) . Ferner sei ϕ eine konvexe Funktion ($\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$). Ist $\mathbb{E}[|\phi(M_n)|] < \infty \forall n \geq 0$ so ist $(\phi(M_n))$ ein Submartingal.

Beweis. (M_1) und (M_2) sind klar. (M_3) : $\mathbb{E}[\phi(M_{n+1})|\mathcal{F}_n] \geq \phi(\underbrace{\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]}_{M_n})$

□

8.10 Bemerkung. Der Beweis vom Lemma zeigt auch die Aussage: Ist (M_n) ein Submartingal und ϕ ist eine konvexe, monoton wachsende Funktion mit $\mathbb{E}[|\phi(M_n)|] < \infty \forall n \geq 1$, so ist $(\phi(M_n))_{n \geq 0}$ ein Submartingal.

8.11 Beispiel. Wenn (M_N) Martingal ist, dann sind (M_n^2) , $(|M_n|)$ und (M^+) Submartingale, falls die entsprechende Interaktionsbedingung erfüllt ist.

8.12 Beispiel. Ein Anleger kauft M_0 Aktien einer Firma. W_0 = Wert der Aktien beim Kauf. Y_n = Kurs einer Aktie n Tage nach dem Kauf W_n = Wert von Aktien n Tagen nach dem Kauf M_n = Anzahl der Aktien im Besitz des Anlegers zwischen Zeitpunkten $(n-1)$ und n

Forderung M_n ist $\sigma(Y_0, Y_n, \dots, Y_{n-1})$ -messbar. Es ist einfach zu sehen:

$W_n = W_{n-1} + M_n(Y_n - Y_{n-1})$ Falls (Y_n) ein $\left\{ \begin{array}{l} \text{Martingal} \\ \text{Supermartingal} \\ \text{Submartingal} \end{array} \right\}$ ist, so

gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_n] &= \mathbb{E}[W_{n-1}] + \mathbb{E}[M_n(Y_n - Y_{n-1})] \\ &= \mathbb{E}[W_{n-1}] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_n(Y_n - Y_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}]] = \mathbb{E}[W_{n-1}] + \mathbb{E}[M_n \mathbb{E}[(Y_n - Y_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}]] \end{aligned}$$

8.13 Definition. Die Folge $(M_n)_{n \geq 1}$ heißt previsible bzgl. (\mathcal{F}_n) , falls M_n \mathcal{F}_{n-1} -messbar ist, $n \geq 1$

8.14 Satz. Sei (Y_n) ein Supermartingal bzgl. (\mathcal{F}_n) . Falls (M_n) [previsible bzgl. (\mathcal{F}_n) ist, und $0 \leq H_n \leq c_n$, dann ist

$$\left((H - Y)_n := \sum_{i=1}^n M_i(Y_i - Y_{i-1}) \right)_{n \geq 0} \text{ ein Supermartingal}$$

Beweis. (M1) und (M2) klar.
(M3):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(HY)_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[(HY)_n + H_{n+1}(Y_{n+1} - Y_n)|\mathcal{F}_n] \\ &= (HY)_n H_{n+1} \underbrace{\mathbb{E}[(Y_{n+1} - Y_n)|\mathcal{F}_n]}_{\leq 0} \leq (HY)_n\end{aligned}$$

□

8.15 Bemerkung. Satz 8.14 läßt sich für Submartingale und Martingaleformulieren. Im letzteren Fall reicht es $|M_n| \leq c_n$ zu fordern.

8.16 Definition. Eine ZV $T : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ heißt Stoppzeit bzgl. (\mathcal{F}_n) , falls $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n \forall n \in \mathbb{N}_0$ ($\Leftrightarrow \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \forall n \in \mathbb{N}_0$)

8.17 Beispiel. Sei (M_n) irgendeine Folge von ZVen und sei $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dann ist $T = \inf\{k \geq 0 : M_k \in A\}$ eine SZ.

Beweis. $\{T = 0\} = \{H_0 \in A\} \in \sigma(M_0)$ Für jedes $k \leq 1$ $\{T = k\} = \{M_0 = A^c, M_1 = A^c, \dots, M_{n-1} A^c, M_n \in A\} \subset \sigma(M_0, M_1, \dots, M_n)$ □

8.18 Satz. Ist die Folge (M_n) ein Supermartingal und T eine SZ bzgl. derselben Filtration (\mathcal{F}_n) , dann ist $(M_{T \wedge n})_{n \geq 0}$ ein Supermartingal (mit $a \wedge b = \min\{a, b\}$)

Beweis. $H_n := \mathbf{1}_{T \geq n}$

$\{T \geq n\} = \left(\underbrace{\{T \leq n-1\}}_{\in \mathcal{F}_{\setminus -\infty}} \right)^c \in \mathcal{F}_{n-1} \Rightarrow H_n$ ist \mathcal{F}_{n-1} -messbar H_n ist previsibel

sibel

$$\begin{aligned}(H - M)_n &= \sum_{i=1}^n H_i (M_i - M_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{T \geq i\}} M_i - \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{T \geq i\}} M_{i-1} \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{T \geq i\}} M_i - \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{T \geq j+1\}} M_j = \\ &= \mathbf{1}_{\{T \geq n\}} H_n + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\underbrace{\mathbf{1}_{\{T \geq i\}} - \mathbf{1}_{\{T \geq i+1\}}}_{\mathbf{1}_{\{T=i\}}} \right) M_i - \mathbf{1}_{\{T \geq 1\}} M_0 \\ &= \mathbf{1}_{\{T \geq n\}} H_n + \sum_{i=1}^{n-1} M_i \mathbf{1}_{T=i} - M_0 \underbrace{\mathbf{1}_{\{T \geq 1\}}}_{=1 - \mathbf{1}_{T=0}} \\ &= \mathbf{1}_{\{T \geq n\}} H_n + \sum_{i=0}^n M_i \mathbf{1}_{\{T=i\}} - M_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{T \wedge n} - M_0 &= M_{T \wedge n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{T=i\}} + \mathbb{1}_{\{T \geq n\}} \right) - M_0 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} M_{T \wedge n} \mathbb{1}_{T=i} + M_{T \wedge n} \mathbb{1}_{\{T \geq n\}} - M_0 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} M_i \mathbb{1}_{\{T=i\}} + M_n \mathbb{1}_{\{T \geq n\}} - M_0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow M_{T \wedge n} - M_0 = (MH)_n \quad n \geq 0$ Da $0 \leq H_n \leq 1$ nach Satz 8.14 ist die Folge $(MH)_n$ ein Supermartingal $\Rightarrow M_{T \wedge n} - M_0$ ist ein Supermartingal $\Rightarrow (M_{T \wedge n})$ ist supermartingal. \square

8.1 Fast sichere Konvergenz von Martingalen

Sei (M_n) ein Submartingal, $a < b \in \mathbb{R}$ $N_0 = -1$

$$N_{2n-1} = \inf\{i > N_{2n-2} : M_i \leq a\}$$

$$N_{2n} = \inf\{i > N_{2n-1} : M_i \geq b\} \text{ für alle } n \geq 1$$

$$M_{N_{2k-1}} \leq a \& M_{N_{2k}} \geq b \quad \forall k \geq 1$$

Wir werden sagen, dass (M_n) zwischen N_{2n-1} und N_{2n} die n-te Aufkreuzung über Intervall (a, b) hat. Setze $U_n = \sup\{k \geq 0 : N_{2k} \leq n\} =$ Anzahl von Aufkreuzungen bis zum Zeitpunkt n .

8.19 Satz. Ist (M_n) ein Submartingal, so gilt $\mathbb{E}[U_n] \leq \frac{\mathbb{E}[(M_n - a)^+] - \mathbb{E}[(M_n - a)^+]}{b - a}$

Beweis. $\phi(x) := a + (x - a)^+$ ϕ ist monoton wachsend und konvex. Dann, nach 8.10, ist $(Y_n := a + (M_n + a)^+)_{n \geq 0}$ ein Submartingal. Ausserdem, (M_n) und (Y_n) haben die gleiche Anzahl von Aufkreuzungen über (a, b) . Definiere $H_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } N_{2k-1} \leq i \leq N_{2k} \text{ für ein } k \geq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ Es gilt: $(b - a)U_n \leq (HY)_n \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[U_n] &\leq \frac{\mathbb{E}[MY_n]}{(b-a)} (MY)_n = \sum_{i=1}^n M_i(Y_i - Y_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (Y_i - Y_{i-1}) = \\
&= \sum_{i=1}^n (1 - M_i)(Y_i - Y_{i-1}) = Y_n - Y_0 - ((1 - M)Y)_n \text{ Ausserdem gilt: } \{1 - M_i = 0\} = \{M_i = 1\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{N_{2k-1} < i < N_{2k}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\{N_{2k-1} < i - 1\} \cap \{N_{2n} > i - 1\}) \\
&\Rightarrow M_n \text{ ist previsibel bzgl } (\mathcal{F}_n) \xrightarrow{\text{Satz 8.14}} ((1 - M)Y)_m \text{ ist Submartingal} \\
&\xrightarrow{\text{Lemma 8.7}} \mathbb{E}[(1 - M)Y_n] \geq \mathbb{E}[(1 - H)Y_n] = 0 \Rightarrow \mathbb{E}[(HY)_n] = \mathbb{E}[Y_n] - \\
&\mathbb{E}[Y_0] - \mathbb{E}[(1 - M)Y_n] \leq \mathbb{E}[Y_n] - \mathbb{E}[Y_0] = \mathbb{E}[(M_n - a)^+] - \mathbb{E}[(M - a)^+] \quad \square
\end{aligned}$$

8.20 Satz (Martingal Konvergenzsatz). Sei (M_n) ein Submartingal mit $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[M_n^+] < \infty$. Dann konvergiert M_n f.s. gegen eine ZV M_∞ mit $\mathbb{E}[|M_\infty|] < \infty$

Beweis. $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

$$\mathbb{E}[U_n] \leq \frac{\mathbb{E}[M_n^+] + |a|}{b - a} ((M_n + a)^+ \leq M_n^+ + |a|, \mathbb{E}[(M_0 - a)^+] > 0)$$

$U_n \uparrow U \in [0, \infty]$ Nach Satz von Monotoner Konvergenz

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[U_n] \leq \sup_n \frac{\mathbb{E}[M_n^+] + |a|}{b - a} < \infty \\ &\Rightarrow u < \infty \text{ f.s. } (P(u = \infty) = 0) \\ &\Rightarrow P\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} M_n \leq a < b \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} M_n\right) = 0 \\ &\Rightarrow P\left(\bigcup_{a < b \in \mathbb{Q}} \{\liminf_{n \rightarrow \infty} M_n \leq a < b \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} M_n\}\right) = 0 \\ &\Rightarrow P(\liminf M_n < \limsup M_n) = 0 \\ &\Rightarrow P(\liminf M_n = \limsup M_n) = 1 \\ &\Rightarrow M_n \text{ konvergiert f.s. } M_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} M_n \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[M_\infty^+] = \mathbb{E}[\lim M_n^+] = \mathbb{E}[\liminf M_n] \stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \liminf \mathbb{E}[M_n^+] < \infty$$

$$\mathbb{E}[M_\infty^-] \leq \liminf \mathbb{E}[M_n^-]$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[M_n^-] = \mathbb{E}[M_n^+] - \mathbb{E}[M_n] \leq \mathbb{E}[M_n^+] - \mathbb{E}[M_0] \Rightarrow \sup_n \mathbb{E}[M_n^-] < \infty$$

□