

5.3 Satz. $\{P_n\}$, P W'Maße auf (Ω, \mathcal{F}) mit Verteilungsfunktionen $\{F_n\}$, F ($F_n(x) = P_n((-\infty, x])$). Dann gilt: $P_n \xrightarrow{w} P \Leftrightarrow F_n(x) \rightarrow F(x)$ für jedes $x \in \{y: F \text{ ist stetig an der Stelle } y\}$.

Beweis. " \Rightarrow " Sei x eine Stetigkeitsstelle von f . Dann $P(\{x\}) = 0 \Rightarrow A_x := (-\infty, x], P(\partial A_x) = P(\{x\}) = 0$ Nach Satz 5.2(v), $F_n(x) = P_n(A_x) \rightarrow P(A_x) = F(x)$

" \Leftarrow " Seien $\{a_k\}, \{b_k\}$ Stetigkeitsstellen von F mit $a_k \downarrow a$ und $b_k \uparrow b$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} P((a_k, b_k]) &= F(b_k) - F(a_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(F_n(a_k) - F_n(b_k))}_{P_n((a_k, b_k])} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} P_n((a_k, b_k]) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P_n((a, b]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dazu: } (a_k, b_k] \uparrow (a, b) &\Rightarrow \lim P((a_k, b_k]) = P((a, b)) \\ &\Rightarrow P((a, b)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P_n((a, b)) \end{aligned}$$

Sei G eine offene Menge $\subseteq \mathbb{R}$. Dann $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, I_k sind offene Intervalle.

$$\begin{aligned} P(G) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(I_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(I_k) \\ &\stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} P_n(I_k) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(G). \end{aligned}$$

Nach Satz 5.2 (iv) $P_n \xrightarrow{w} P$

□

Bemerkung. Zum Fatoulemma

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu$$

Bei uns:

$\Omega = \mathbb{N}$, $\mu =$ Zählmaß, $f_n : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty) : f_n(k) = P_n(k), k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(k) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} f_n(k)$$

5.4 Beispiel. Seien X_1, X_2, \dots iid mit $\text{Exp}(1)$ Verteilung, d.h. Dichte von X_1 ist $e^{-x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$. Definiere $Y_n := \max_{k \leq n} X_k$. Wir wollen eine Folge $\{a_n\}$ bestimmen, so dass $Y_n - a_n$ schwach konvergiert.

$$\begin{aligned} F_{Y_n - a_n}(x) &= P(Y_n - a_n \leq x) = P(Y_n \leq x + a_n) = P(\max_{k \leq n} X_k \leq x + a_n) \\ &= P\left(\bigcap_{k=1}^n \{X_k \leq x + a_n\}\right) = (P(X_1 \leq x + a_n))^n \\ &= \begin{cases} 0, & x \leq -a_n \\ (1 - e^{-x-a_n})^n, & x > -a_n \end{cases} \end{aligned}$$

$$a_n = \ln n \Rightarrow (1 - e^{-x-a_n})^n = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n \rightarrow e^{-e^{-x}}$$

$$\Rightarrow F_{Y_n - a_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-e^{-x}} \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ ist eine Verteilungsfunktion}$$

5.5 Satz. Sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, $D_h = \{x : h \text{ ist stetig an der Stelle } x\}$. Falls $X_n \xrightarrow{w} X$ und $P(X \in D_h) = 0$, so $h(X_n) \xrightarrow{w} h(X)$.

Beweis. Sei ν_n Verteilung von $h(X_n)$. Nach Satz 5.2 genügt es zu zeigen, dass $\limsup \nu_n(F) \leq \nu(F)$, $\forall F$ abgeschlossen. $\Leftrightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(h^{-1}(F)) \leq P(h^{-1}(F))$ Es gilt:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(h^{-1}(F)) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(\overline{h^{-1}(F)}) \leq 2 \leq P(\overline{h^{-1}(F)})$$

Sei $\{x_n\} \subseteq h^{-1}(F) : x_n \rightarrow x$. $x_n \in h^{-1}(F) \Rightarrow h(x_n) \in F$. Ist h stetig an der Stelle x , so $f(x_n) \rightarrow h(x) \Rightarrow x \in h^{-1}(F) \Rightarrow \overline{h^{-1}(F)} \subseteq h^{-1}(F) \cup D_h \Rightarrow P(\overline{h^{-1}(F)}) = P(h^{-1}(F)) \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(h^{-1}(F)) \leq P(h^{-1}(F))$. \square

5.6 Satz. Sei $(X_n)_{n \geq 1}$ Folge von Zufallsvariablen. Dann gilt:

a) $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{w} X$

b) $X_n \xrightarrow{w} c \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} c$ (Alle X_i leben auf dem gleichen Raum)

c) b) ist falsch ohne die Annahme, dass der Limes eine Konstante ist.

Beweis. Übung \square

²schwache Konvergenz von P_n

5.2 Schwache Konvergenz: hinreichende Bedingungen

$X_n \xrightarrow{w} X$. Um das zu zeigen müssen wir beweisen, dass

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \rightarrow \mathbb{E}[f(X)] \quad \forall f \in C_b$$

$\mathcal{G} := \{G: \text{rechtsstetig, monoton wachsend, } G(-\infty) \geq 0, G(\infty) \leq 1\}$. Wir schreiben $G_n \rightarrow G$, falls $G_n(x) \rightarrow G(x)$ für jede Stetigkeitsstelle von G .

5.7 Satz (Auswahlsatz von Helly). *Sei $\{G_n\} \subseteq \mathcal{G}$. Dann existiert eine Teilfolge $\{G_{n_k}\}$ und ein $G \in \mathcal{G}$ so dass $G_{n_k} \Rightarrow G$*

5.8 Definition. Eine Folge von Verteilungen $\{P_n\}$ heißt straff, falls $\forall \epsilon > 0 \exists M > 0 : P_n([-M, M]) > 1 - \epsilon \forall n \geq 1$

5.9 Satz (Satz von Prokhorov). *Eine Folge $\{P_n\}$ ist relativ kompakt genau dann, wenn $\{P_n\}$ straff ist.*

Beweis. "⇐" $\{P_n\}$ ist straff. Nach Satz 5.7, $\exists G \in \mathcal{G}$ und $\{P_{n_k}\}$ so dass $F_{n_k} \Rightarrow G$. Wir müssen zeigen, dass G eine Verteilungsfunktion ist. $\forall \epsilon > 0 \exists a, b$ Stetigkeitsstellen von G , so dass $F_{n_k}(b) - F_{n_k}(a) \geq 1 - \epsilon \forall n_k$. $G(b) - G(a) = \lim_{n_k \rightarrow \infty} (F_{n_k}(b) - F_{n_k}(a)) \geq 1 - \epsilon \Rightarrow G(b) - G(a) \geq 1 - \epsilon$. Aber ϵ ist beliebig $\Rightarrow G(\infty) - G(-\infty) \geq 1$, $G(\infty) \leq 1$ und $G(-\infty) \geq 0 \Rightarrow G(\infty) = 1, G(-\infty) = 0$

"⇒" $\{P_n\}$ relativ kompakt. Wir nehmen an, dass $\{P_n\}$ nicht straff ist.

$\exists \epsilon > 0 \forall M > 0 \exists n_M : P_{n_M}([-M, M]) < 1 - \epsilon$

Für $M \in \mathbb{N}$ definiere $\tilde{P}_M = P_{n_M}$. $\{\tilde{P}_n\} \subseteq \{P_n\}$ und $\{P_n\}$ ist relativ kompakt $\Rightarrow \exists \{M_k\} : \tilde{P}_{M_k} \Rightarrow P \left(\tilde{F}_{M+k} \Rightarrow F \right) \exists a, b$ Stetigkeitsstellen von F mit $F(b) - F(a) > 1 - \epsilon$:

$$\tilde{F}_{M_k}(b) - \tilde{F}_{M_k}(a) \rightarrow F(b) - F(a) > 1 - \epsilon$$

$$\tilde{F}_{M_k}(b) - \tilde{F}_{M_k}(a) = \tilde{P}_{M_k}((a, b]) \leq {}^3 \tilde{P}_{M_k}([-M, M])$$

$$\Rightarrow \tilde{P}_{M_k}([-M_k, M_k]) \geq 1 - \epsilon \text{ Widerspruch zur Annahme}$$

□

5.10 Satz. *Falls $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[|X_n|^p] < \infty$ für ein $p > 0$, so ist $\{P_{X_n}\}$ straff.*

Beweis.

$$\sup_{n \geq 1} P(|X_n| > M) \leq \sup_{n \geq 1} \frac{\mathbb{E}[|X_n|^p]}{M^p} = \frac{C}{M^p}$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists M_\epsilon : \sup_{n \geq 1} P(|X_n| > M) \leq \epsilon \quad \forall M \geq M_\epsilon$$

□

³für alle M_k groß genug

5.11 Definition. Eine Klasse $K \subseteq C_b(\mathbb{R})$ heißt trennende Familie, falls:

$$\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[f(Y)], \forall f \in K \Rightarrow P_X = P_Y$$

5.12 Satz. Sei K eine trennende Familie. Die Folge $\{P_n\}$ konvergiert schwach genau dann, wenn:

(1) $\{P_n\}$ ist straff

$$(2) \forall f \in K \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f dP_n$$

Beweis. “ \Rightarrow ” Klar

“ \Leftarrow ” $\{P_n\}$ ist straff $\xrightarrow{\text{Prokhorov}} \exists \{P_{n_k}\}$ und P sodass $P_{n_k} \xrightarrow{w} P$. Sei jetzt $\{P_{n_k}\}$ eine weitere konvergierende Teilfolge: $P_{n'_k} \xrightarrow{x} P'$.

$$\int f dP = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \int f dP_{n_k} = \lim_{n'_k \rightarrow \infty} \int f dP_{n'_k} = \int f dP' \quad \forall f \in K$$

K ist eine trennende Familie $\Rightarrow P = P'$. Angenommen $P_n \not\xrightarrow{w} P \Leftrightarrow \exists x_0$ -Stetigkeitsstelle von F (F Verteilungsfunktion von P), so dass

$$F_n(x_0) \not\rightarrow F(x_0) \Leftrightarrow \exists \epsilon > 0 \text{ und } \{n_k\} : |F_{n_k}(x_0) - F(x_0)| > \epsilon \forall n_k$$

$$\exists \{n_{k_j}\} \subseteq \{n_k\} : F_{n_{k_j}}(x) \rightarrow F(x) \forall x\text{-Stetigkeitsstellen von } F. \quad \square$$

5.13 Beispiel. (1) $K_0^4 = \{f_{a,\epsilon}, a \in \mathbb{R}, \epsilon > 0\}$,

$$f_{a,\epsilon}(x) := \begin{cases} 1, & x \leq a \\ 1 - \frac{x-a}{\epsilon}, & x \in [a, a+\epsilon] \\ 0, & x \geq a+\epsilon \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F_x(a) &= P(X \in (-\infty, a]) = \int \mathbb{1}_{(-\infty, a]} dP_X \leq \int f_{a,\epsilon} dP_X \\ &= \int f_{a,\epsilon} dP_Y \leq P(Y \in (-\infty, a+\epsilon]) = F_Y(a+\epsilon) \end{aligned}$$

Analog $F_Y(a) \leq F_X(a+\epsilon)$

\Rightarrow Falls a eine Stetigkeitsstelle von F_X, F_Y ist: $F_X(a) = F_Y(a)$

(2) $K = \{e^{itx}, t \in \mathbb{R}\}, f_t(x) = e^{itx}$

⁴eine trennende Familie

5.3 Charakteristische Funktionen

5.14 Definition. Sei X eine reellwertige ZV. Die Abbildung $\phi_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\phi_x(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}[\cos(tX)] + i\mathbb{E}[\sin(tX)]$ heißt charakteristische Funktion von X .

5.15 Bemerkung. Ist P_X absolut stetig, mit der Dichte $f(x)$ so gilt:
 $\phi_X(t) \int_{\mathbb{R}} e^{itX} f(x) dx = \hat{f}(-t)$ wobei $\hat{f}(t)$ die Fouriertransformierte von der Funktion $f(x)$ ist.

5.16 Satz. Jede charakteristische Funktion hat folgende Eigenschaften:

- (a) $\phi_X(0) = 1$
- (b) $\phi_{-X}(t) = \phi_X(-t) = \overline{\phi_X(t)}$
- (c) $P_X = P_{-X} \Leftrightarrow \phi_X(t) \in \mathbb{R} \forall t \in \mathbb{R}$
- (d) $|\phi_X(t)| \leq 1$
- (e) ϕ_X ist gleichmäßig stetig
- (f) $\phi_{aX+b}(t) = e^{itb} \phi_X(at)$
- (g) Sind X und Y unabhängig, so gilt: $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t) \phi_Y(t)$

Beweis. a), b) offensichtlich.

$$c) \text{ "}\Rightarrow\text{" } P_X = P_{-X} \Rightarrow \phi_X(t) = \phi_{-X}(t) = \overline{\phi_X(t)} \Rightarrow \phi_X(t) \in \mathbb{R}$$

$$\text{"}\Leftarrow\text{" } \phi_X(t) \in \mathbb{R} \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \phi_X(t) = \phi_{-X}(t) \forall t \in \mathbb{R}$$

Da $\{e^{itX}, t \in \mathbb{R}\}$ eine trennende Familie ist, gilt: $P_X = P_{-X}$

$$d) |\phi_X(t)| = |\mathbb{E}[e^{itX}]| \leq \mathbb{E}[|e^{itX}|] = 1$$

$$e) |\phi_X(t+h) - \phi_X(t)| = |\mathbb{E}[e^{i(t+h)X} - e^{itX}]| \leq \mathbb{E}[|e^{itX}(e^{ihX} - 1)|] = \mathbb{E}[|e^{ihX} - 1|] \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0 \text{ wegen dominierter Konvergenz.}$$

$$f) \phi_{aX+b}(t) = \mathbb{E}[e^{it(aX+b)}] = \mathbb{E}[e^{itaX} e^{itb}] = e^{itb} \phi_X(ta)$$

$$g) \phi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[e^{it(X+Y)}] = \mathbb{E}[e^{itX} e^{itY}] = \mathbb{E}[e^{itX}] \mathbb{E}[e^{itY}] = \phi_X(t) \phi_Y(t). \quad \square$$

5.17 Beispiel. Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit den Parametern a, σ^2 , d.h. X hat Dichte:

$$f_{a,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R} (X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2))$$

⁵sind unabhängig

$$\phi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_{a,\sigma^2}(x) dx$$

Spezialfall: Sei $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$\phi_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + i \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{=0}$$

$$\phi'_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} (-\sin(tx)) x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -t \phi_Y(t)$$

$$\frac{d}{dt} \left[e^{\frac{t^2}{2}} \phi_Y(t) \right] = t e^{\frac{t^2}{2}} \phi_Y(t) + e^{\frac{t^2}{2}} \phi'_Y(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \left[t \phi_Y(t) + \phi'_Y(t) \right] = 0$$

$$\Rightarrow e^{\frac{t^2}{2}} \phi_Y(t) = \text{const. Da } \phi_Y(0) = 1, \text{ const} = 1 \Rightarrow \phi_Y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$X \sim \mathcal{N}_{a,\sigma^2} \Rightarrow P_X = P_{\sqrt{\sigma^2}Y+a} \Rightarrow \phi_X(t) = \phi_{\sqrt{\sigma^2}Y+a}(t) = e^{ita - \sigma^2 \frac{t^2}{2}}$$

5.18 Satz. Sei X eine Zufallsvariable. Ist $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so gilt $\phi_Y(t)$ ist k -mal differenzierbar und

$$\phi^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E} \left[X^k e^{itX} \right], \quad (5.1)$$

$\phi^{(k)}$ ist gleichmäßig stetig. Ferner,

$$\mathbb{E}[X^m] = \frac{1}{i^m} \phi^{(m)}(0), \quad m = 0, \dots, k \quad (5.2)$$

und

$$\phi_X(t) = \sum_{j=0}^k \frac{\phi^{(j)}(0)}{j!} t^j + o(|t|^k) \quad \text{für } t \rightarrow 0 \quad (5.3)$$

5.19 Lemma. $\forall x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\left| e^{iX} - \sum_{j=0}^n \frac{(ix)^j}{j!} \right| \leq \min \left\{ \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|x|^n}{n!} \right\}$$

Beweis von Satz 5.18. Induktion über k : $\underline{k=1}$: $\mathbb{E}[|X|] < \infty$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h} - i \mathbb{E}[X e^{itX}] \right| &= \left| \mathbb{E} \left[\frac{e^{i(t+h)X} - e^{itX}}{h} - iX e^{itX} \right] \right| \\ &\leq \mathbb{E} \left[\underbrace{|e^{itX}|}_{=1} \underbrace{\left| \frac{e^{ihX} - 1}{h} - iX \right|}_{=: \psi_h(X)} \right] \end{aligned}$$

⁶Partielle Integration mit $u = -\sin(tx)$, $v = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $v' = x e^{-\frac{x^2}{2}}$

⁷Lemma 3.6 im Buch von Durrett

Lemma 5.19 mit $n=1$:

$$\psi_n(x) \leq \frac{(|X|h)^2}{2|h|} = \frac{x^2|h|}{2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \Rightarrow \psi_n(X) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{f.s.} 0 :$$

Lemma 5.19 mit $n=0$:

$$\psi_h(x) \leq \left| \frac{e^{ix} - 1}{h} \right| + |x| \leq \frac{|hx|}{|h|} \leq 2|x|$$

$\Rightarrow \psi_h(X)$ hat integrierbare Majorante $2|X|$

\Rightarrow Nach dominierter Konvergenz: $\mathbb{E}[\psi_h(X)] \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

Sei (a) für k bewiesen und $\mathbb{E}[|X|^{k+1}] < \infty \Rightarrow \mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ und $\phi^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}[X^k e^{itX}]$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{\phi^{(k)}(t+h) - \phi^{(k)}(t)}{h} - i^{k+1} \mathbb{E}[X^{k+1} e^{itX}] \right| &\leq \mathbb{E} \left[\left| i^k x^k \frac{e^{i(t+h)X} - e^{itX}}{h} - i^{k+1} X^{k+1} e^{itX} \right| \right] \\ &= \mathbb{E} \left[|X|^k \left| \frac{e^{ihX} - 1}{h} - iX \right| \right] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Wegen dominierter Konvergenz: $\Rightarrow (a)$

$$\begin{aligned} \left| \phi(t) - \sum_{j=0}^k \frac{\phi^{(j)}(0)}{j!} t^j \right| &\leq \mathbb{E} \left[\left| e^{itX} - \sum_{j=0}^k \frac{(itX)^j}{j!} \right| \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\min \left\{ \frac{|tX|^{k+1}}{(k+1)!}, \frac{2|tX|^k}{k!} \right\} \right] \\ &= |t|^k \mathbb{E} \left[\min \left\{ \frac{|t||X|^{k+1}}{(k+1)!}, \frac{2|X|^k}{k!} \right\} \right] \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

□