

## Kapitel 7

# Bedingte Erwartung und Verteilung

### 7.1 Definition von bedingten Erweiterungen

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein W-Raum.  $B \in \mathcal{F} : P(B) > 0$

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ bedingte W'keit von A gegeben B}$$

$\Rightarrow P_B$  mit  $P_B(A) = P(A|B)$  ist ein W'Maß auf  $(\Omega, \mathcal{F})$

$\Rightarrow E_B[X] = E[X \cdot \mathbb{1}_B] / P(B) = E[X|B]$

X, Y unabhängige ZV, f(X, Y) - messbar. Sei  $Y_0 : P(Y = y_0) > 0$

$$\begin{aligned} E[f(X, Y)|Y = y_0] &= \frac{E[f(X, Y)\mathbb{1}_{\{Y=y_0\}}]}{P(Y = y_0)} \\ &= \frac{E[f(X, Y_0)\mathbb{1}_{\{Y=y_0\}}]}{P(Y = y_0)} \\ &= E[f(X, Y_0)] \end{aligned}$$

**7.1 Definition.** Sei  $\{A_i\} \subset \mathcal{F}$  mit  $A_i$  paarweise disjunkt,  $P(A_i) > 0$  für alle  $i > 1$ ,  $\mathcal{A} = \sigma(\{A_i\})$  Sei X eine ZV mit  $E[|X|] < \infty$ . Dann heisst die ZV

$$\tilde{X}(\omega) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E[X\mathbb{1}_{A_i}]}{P(A_i)} \mathbb{1}_{A_i}(\omega)$$

die bedingte Erwartung von X gegeben  $\mathcal{A}$ .  $X \in L^2$ , d.h.  $E[X^2] < \infty$   
 $E[XY]$  = Skalar-produkt in  $L^2$ . Sei  $H_{\mathcal{A}} = \{X \in L^2 : X \text{ ist } \mathcal{A}\text{-number}\}$  Wir wissen, dass  $E[X]$  die Funktion  $E[(X - a)^2]$  minimiert. Bedingte Erwartung ist eine ZV aus  $H_{\mathcal{A}}$  die  $E[(X - Y)^2]$  minimiert.

Minimum wird auf der Projektion  $\tilde{X}$  von X auf  $H_{\mathcal{A}}$  erreicht, d.h.

$$\mathbb{E}[(X - \hat{X})Y] = 0 \quad \forall Y \in H_{\mathcal{A}}$$

$$\begin{aligned} g(Y) &= \mathbb{E}[(X - Y)^2] = \mathbb{E}[(X - \hat{X} + \hat{X} - Y)^2] \\ &= \mathbb{E}[(X - \hat{X})^2 + \mathbb{E}[(X - \hat{X})(\hat{X} - Y)]] \\ &= \mathbb{E}[(\hat{X} - Y)^2] = g(\hat{X}) + 0 + \mathbb{E}[(\hat{X} - Y)^2] \\ &\geq g(\hat{X}) \end{aligned}$$

$$\hat{X} \in H_{\mathcal{A}} \Rightarrow \hat{X} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega), \mathbb{E}[(X - \hat{X})Y] = 0 \quad \forall Y \in H_{\mathcal{A}}.$$

Wähle  $Y = \mathbb{1}_{A_i}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X - \mathbb{1}_{A_i}] = \mathbb{E}[\hat{X} \mathbb{1}_{A_i}] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{\infty} a_j \mathbb{1}_{A_j} \mathbb{1}_{A_i}\right] = \mathbb{E}[a_i \mathbb{1}_{A_i}] = a_i P(A_i)$$

$$\Rightarrow a_i = \frac{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_{A_i}]}{P(A_i)}$$

**Eigenschaften** ( der bedingten Erwartung).

- $\mathbb{E}[X|\mathcal{A}] = X$  für jedes  $X$   $\mathcal{A}$ -messbar.
- $\mathcal{A} = \{0, \Omega\} \Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{A}] = \mathbb{E}[X]$

**7.2 Lemma.** 1)  $\hat{X} = \mathbb{E}[X|\mathcal{A}]$  ist  $\mathcal{A}$ -messbar

$$2) \mathbb{E}[X \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\hat{X} \mathbb{1}_A] \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

*Beweis.* 1) klar

$$\begin{aligned} 2) A \in \mathcal{A} &\Leftrightarrow \exists \{i_n\} : A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{i_n} \Rightarrow \mathbb{E}[\hat{X} \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}\left[\hat{X} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_{i_n}}\right] = \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[\hat{X} \mathbb{1}_{A_{i_n}}] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_{A_{i_n}}]}{P(A_{i_n})} \mathbb{1}_{A_{i_n}}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{A_{i_n}}] \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_{i_n}}] = \\ &\mathbb{E}[X \mathbb{1}_A] \end{aligned}$$

□

**7.3 Lemma.** Die Eigenschaften (1), (2) sind zur Definition 7.1 äquivalent.

*Beweis.* • Definition  $\Rightarrow$  Eigenschaften ist schon bewiesen.

- Eigenschaften  $\Rightarrow$  Definition 7.1

$$1) \hat{X} - \mathcal{A}\text{-messbar} \Rightarrow \hat{X} \in H_{\mathcal{A}} \quad \hat{X} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbb{1}_{A_i}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ mit } A = \mathcal{A}_i : \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{A_i}] &= \mathbb{E}[\hat{X}\mathbb{1}_{A_i}] = \mathbb{E}[a_i\mathbb{1}_{A_i}] = a_i P(A_i) \\ \Rightarrow a_i &= \frac{\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{A_i}]}{P(A_i)} \end{aligned}$$

□

**7.4 Definition.** Sei  $X$  eine ZV mit  $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ , sei  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ . Die ZV  $\hat{X}$  mit Eigenschaften

1)  $\hat{X}$  ist  $\mathcal{A}$ -messbar

$$2) \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\hat{X}\mathbb{1}_A] \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

heißt bedingte Erwartung von  $X$  gegeben  $\mathcal{A}$

**7.5 Satz.** Für jede ZV  $X \in L^1$  und jede  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$  existiert die bedingte Erwartung und ist fast sicher eindeutig.

*Beweis.* 1. Fall:  $X \geq 0$ . Definiere  $Q : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $Q(A) = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A]$ .  $\mathbb{E}[|X|] < \infty \Rightarrow Q(A)$  ein endliches Maß und falls  $P(A) = 0 \Rightarrow Q(A) = 0 \Rightarrow Q \ll P \Rightarrow$ . Nach Radon-Nikodym-Satz  $\exists$  eine  $\mathcal{A}$ -messbare Funktion  $\hat{X} : Q(A) = \int_A \hat{X} dP \quad \forall A \in \mathcal{A}$   $\hat{X}$  ist f.s. eindeutig  $= \mathbb{E}[\hat{X}\mathbb{1}_A]$  □

## 7.2 Eigenschaften von bedingten Erweiterungen

A  $X|_{\mathcal{A}}$ -messbar  $\Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{A}] = X$  fast sicher

B  $\sigma(X)$  und  $\mathcal{A}$  unabhängig  $\Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{A}] = \mathbb{E}[X]$  fast sicher.

*Beweis von B:*  $\mathbb{E}[X] = \text{const} \Rightarrow \mathbb{E}[X]$  messbar bzgl.  $\mathcal{A} \Rightarrow (1)$

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X]\mathbb{1}_A] &= \mathbb{E}[X]P(A) \\ \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] &= \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X]P(A) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X]]\mathbb{1}_A \Rightarrow (2)$$

□

C  $\mathbb{E}[aX + bY|\mathcal{A}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{A}] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{A}]$  fast sicher

D  $X \leq Y$  fast sicher  $\Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{A}] \leq \mathbb{E}[Y|\mathcal{A}]$  fast sicher

*Beweis.*  $\mathbb{E}[\hat{X}\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] \leq \mathbb{E}[Y\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\hat{Y}\mathbb{1}_A]$  für jede Menge  $A \in \mathcal{A}$ . Dann für  $A_\epsilon := \{\hat{X} - \hat{Y} \geq \epsilon\}$  gilt:  $0 \geq \mathbb{E}[(\hat{X} - \hat{Y})\mathbb{1}_{A_\epsilon}] \geq \mathbb{E}[\epsilon\mathbb{1}_{A_\epsilon}] = \epsilon P(A_\epsilon) \Rightarrow P(A_\epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0 \Rightarrow P(\hat{X} > \hat{Y}) = 0 \Rightarrow P(\hat{X} \leq \hat{Y}) = 1$  □

E  $X_n \geq 0 : X_n \uparrow X$  mit  $\mathbb{E}[X] < \infty \Rightarrow \mathbb{E}[X_n|\mathcal{A}] \uparrow \mathbb{E}[X|\mathcal{A}]$

*Beweis.*  $Y_n := X - X_n$ ,  $Y_n \downarrow 0$

Nach Eigenschaft D gilt:  $\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{A}]$  ist monoton fallend und  $\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{A}] \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}[X_n|\mathcal{A}]$  monoton wachsend und  $\leq \mathbb{E}[X|\mathcal{A}] \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n|\mathcal{A}]$  und ist  $\mathcal{A}$ -messbar.  $\int_A \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y_n|\mathcal{A}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_A \mathbb{E}[Y_n|\mathcal{A}] dP = \int_A Y_n dP \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_A \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n}_{=0} dP \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y_n|\mathcal{A}] = 0 \text{ f.s.} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n|\mathcal{A}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{A}]$

□

F  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{A}]] = \mathbb{E}[X]$

G Falls  $X$   $\mathcal{A}$ -messbar, ist  $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ ,  $\mathbb{E}[|XY|] < \infty$ , so gilt  $\mathbb{E}[XY|\mathcal{A}] = X\mathbb{E}[Y|\mathcal{A}]$

*Beweis.*  $X\mathbb{E}[Y|\mathcal{A}]$  ist  $\mathcal{A}$ -messbar  $\Rightarrow$  (1). Also müssen wir zeigen, dass

$$\mathbb{E}[XY\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X\mathbb{E}[Y|\mathcal{A}]\mathbb{1}_A] \quad A \in \mathcal{A} \quad (7.1)$$

a. Fall:  $X = \mathbb{1}_B$ ,  $B \in \mathcal{A}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XY\mathbb{1}_A] &= \mathbb{E}[Y\mathbb{1}_{A \cap B}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{A}]\mathbb{1}_{A \cap B}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_B \mathbb{E}[Y|\mathcal{A}]] \\ &= \mathbb{E}[X\mathbb{E}[Y|\mathcal{A}]\mathbb{1}_A] \end{aligned}$$

b. Fbll:  $X = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{B_i}$ ,  $B_i \in \mathcal{A}$ . Dann folgt (\*) aus Linearität der bedingten Erwartung.

c. Fcbl:  $X, Y \geq 0 \exists \{X_n\}$  an einfachen ZV:  $X_n \uparrow X$ . Dann (\*) für einfache Funktionen folgt

$$\begin{aligned} \int_A XY dP &\leftarrow \int_A X_n Y dP = \int_A X_n \mathbb{E}[Y|\mathcal{A}] dP \rightarrow \int_A X \mathbb{E}[Y|\mathcal{A}] dP \\ &\Rightarrow (*) \end{aligned}$$

d. Fdll:  $X = X^+ - X^-$   $Y = Y^+ - Y^-$

□

H (Turmeigenschaft)  $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$  -  $\sigma$ -Algebra. Dann gilt:  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{A}_1]|\mathcal{A}_2] = \mathbb{E}[X|\mathcal{A}_1]$

*Beweis.* Beweis von H:  $\mathbb{E}[X|\mathcal{A}_1]$  ist  $\mathcal{A}_\infty$ -messbar ZV. Da  $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$  so ist  $\mathbb{E}[X|\mathcal{A}_1]$  -  $\mathcal{A}_2$ -messbar. Dann nach A:  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{A}_1]|\mathcal{A}_2] = \mathbb{E}[X|\mathcal{A}_\infty]$ . Für jedes  $A \in \mathcal{A}_1$  gilt:

$$\int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{A}_1] dP = \int_A X dP = \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{A}_2] dP$$

Mit anderen Worten:

$$\mathbb{E} [\mathbb{E} [X|\mathcal{A}_2] \mathbf{1}_A] = \mathbb{E} [\mathbb{E} [X|\mathcal{A}_1] \mathbf{1}_A], \quad A \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E} [\mathbb{E} [X|\mathcal{A}_2] | \mathcal{A}_1] = \mathbb{E} [X|\mathcal{A}_1]$$

Falls  $X \in L^2$ , so ist  $Y \rightarrow \mathbb{E} [(X - Y)^2]$  minimal für  $Y = \mathbb{E} [X|\mathcal{A}]$ , wobei  $Y \in \{\text{alle } \mathcal{A} - \text{messbare ZVn mit der 2.ten ?}\}$

$$|\mathbb{E} [X|\mathcal{A}]| \leq \mathbb{E} [|X| | \mathcal{A}]$$

Sei  $\phi$  eine konvexe Funktion,  $\mathbb{E} [|\phi(X)|] < \infty, \mathbb{E} [|X|] < \infty$ . Dann

$$\mathbb{E} [\phi(X)|\mathcal{A}] \geq \phi(\mathbb{E} [X|\mathcal{A}]) \text{ fast sicher (Jensen'sche Ungleichung)}$$

$$\text{Beweis. } g_x(y) = \frac{\phi(y) - \phi(x)}{y - x}, y \in \mathbb{Z} \setminus \{x\}$$

1)  $\phi$ -konvex  $\Rightarrow g_x(y)$  monoton

2)  $D^-(x) = \lim_{y \uparrow x} g_x(y)$  und  $D^+(x) = \lim_{y \downarrow x} g_x(y)$  existieren.

$$\begin{aligned} 3) \quad & \phi(y) = \phi(x) + (y - x)g_x(y) \geq \phi(x) + (y - x)D^-(x) \quad y < x \\ & \phi(y) = \phi(x) + (y - x)g_x(y) \geq \phi(x) + (y - x)D^+(x) \quad y > x \\ & \Rightarrow \phi(y) \geq \phi(x) + (y - x)D^+(x) \quad \forall x, y \end{aligned}$$

4)  $D^+(x)$  ist monoton (Klenke Satz 7.7)  $\Rightarrow D^+(x)$  ist messbar.

$$\begin{aligned} 5) \quad & Y = X \quad x = \mathbb{E} [X|\mathcal{A}] \Rightarrow \phi(x) \geq \phi(\mathbb{E} [X|\mathcal{A}]) + (X - \mathbb{E} [X|\mathcal{A}])D^+(\mathbb{E} [X|\mathcal{A}]) \\ & \xRightarrow{\text{Monotonie}} \mathbb{E} [\phi(X)|\mathcal{A}] \geq \phi(\mathbb{E} [X|\mathcal{A}]) + \mathbb{E} [(X - \mathbb{E} [X|\mathcal{A}])D^+(\mathbb{E} [X|\mathcal{A}])] \\ & \text{Nach 4) ist } D^+(\mathbb{E} [X|\mathcal{A}]) \mathcal{A}\text{-messbar. Dann } \mathbb{E} [(X - \mathbb{E} [X|\mathcal{A}])D^+(\mathbb{E} [X|\mathcal{A}])|\mathcal{A}] = \\ & D^+(\mathbb{E} [X|\mathcal{A}])\mathbb{E} [(X - \mathbb{E} [X|\mathcal{A}])|\mathcal{A}] = D^+(\mathbb{E} [X|\mathcal{A}])\underbrace{(\mathbb{E} [X|\mathcal{A}] - \mathbb{E} [\mathbb{E} [X|\mathcal{A}] | \mathcal{A}])}_{= \mathbb{E} [X|\mathcal{A}]} = \\ & 0 \end{aligned}$$

□

**7.6 Definition.**  $\mathbb{E} [X|Y] = \mathbb{E} [X|\sigma(Y)]$

**7.7 Satz.** Ist  $X$  eine  $\sigma(Y)$ -messbare ZV, so existiert eine messbare Funktion  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass  $X = \phi(Y)$ .

*Beweis.* i. Schritt  $X = \mathbf{1}_A, A \in \sigma(Y) \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A = Y^{-1}(B)$   
Definiere  $\phi = \mathbf{1}_B \quad X = \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{Y^{-1}(B)} = \mathbf{1}_{Y \in B} = \phi(Y)$

ii. Schritt  $X$  ist eine einfache Funktion.  $X = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{1}_{A_i}, A_i \in \sigma(Y), \phi = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{1}_{B_i}$  wobei  $A_i = Y^{-1}(B_i)$

iii. Schritt  $X$  ist beliebig  $\Rightarrow \{X_n\}$  von einfachen Funktionen, so dass  $X_n \rightarrow X$ . Nach 2. Schritt,  $\exists$  Folge  $\{\phi_n\}$ , so dass  $X_n = \phi_n(Y)$ .

iv. Schreibe Definiere  $B = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x) \text{ existiert}\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  und definiere  $\phi(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x), & x \in B \\ 0, & x \in B^c \end{cases}$  ist messbare  $\Rightarrow X = \phi(Y)$

□

**7.8 Definition.** Sei  $\phi = \mathbb{E}[X|Y] = \phi(Y)$ . Dann  $\phi(Y)$  heißt der bedingte Erwartungswert von  $X$  gegeben  $\{Y = y\}$

$$\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X|Y = y]_{|y=Y}$$

### 7.3 Bedingte Verteilungen

**7.9 Definition.**  $P(B|Y = y) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B|Y = y]$  heißt bedingte Wahrscheinlichkeit von  $B$  gegeben  $\{Y = y\}$   $P(B|\mathcal{A}) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B|\mathcal{A}]$  heißt bedingte Wahrscheinlichkeit von  $B$  gegeben  $\mathcal{A}$

$P(B|\mathcal{A})(\omega), P(\cdot|\mathcal{A})(\omega)$  ein W'Maß ist? Sei  $\{B_i\}$  eine Folge von paarweise disjunkten Mengen. Dann  $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i|\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|\mathcal{A})$  fast sicher.  $\Leftrightarrow \exists$  Nullmenge  $N(\{B_i\}) : P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i|\mathcal{A})(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|\mathcal{A})(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega \setminus N(\{B_i\})$

**7.10 Definition.** Die Funktion  $P(\omega, B)$  heißt reguläre Version der bedingten W'keit gegeben  $\mathcal{A}$  falls:

- a) Für jedes  $\Omega \ni \omega$  ist  $P(\omega, \cdot)$  ein W'Maß auf  $(\Omega, \mathcal{F})$
- b) Für jedes  $B \in \mathcal{F}$  ist  $P(\cdot, B)$  eine Version  $P(B|\mathcal{A})$

**7.11 Definition.** Sei  $X$  eine reelle ZV. Die Funktion  $P(\omega, A)$  heißt reguläre Version der bedingten Verteilung von  $X$  gegeben  $\mathcal{A}$ , falls

- a) Für jedes  $\omega \in \Omega$  ist  $P(\omega, \cdot)$  ein W'Maß auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
- b) Für jedes  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  ist  $P(\cdot, A)$  eine Version von  $P(X \in A|\mathcal{A})$

Seien  $(X, Y)$  ZVen mit gemeinsamer Verteilung, die absolut stetig bzgl.  $\lambda \otimes \mu$  ist. Die Dichte  $f(x, y)$

$$P((x, y) \in A) = \int_A f(x, y) \lambda \times \mu(dx, dy), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

Klar, dass  $f_y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \lambda(dx)$  die Dichte von  $y$  bzgl.  $\mu$  ist. Definiere  $f_{X|Y}(X|Y) = \begin{cases} \frac{f(x, y) f_y(y)}{f_y(y)}, & \text{falls } f_y(y) > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$  Dann gilt:  $P(X \in B|Y = y) = \int_B f_{X|Y}(X|Y) \lambda dx$

*Beweis Obige Aussage.* Aus der Definition von bedingten W'keiten folgt, dass  $P(X \in B|Y = y)$  durch folgende Gleichheit definiert ist:

$$P(X \in B, Y \in C) = \int_C P(X \in B|Y = y) P_Y(dy)$$

$$\begin{aligned} \int_C \left( \int_B f_{X|Y}(X|Y) \lambda(dx) \right) f_Y(y) \mu(dy) &= \int_B \left( \int_C f_{x|y}(x|y) f_y(y) \mu(dy) \right) \lambda(dx) \\ &= \int_{B \times C} f(x, y) \lambda \otimes \mu(dx, dy) \\ &= P((x, y) \in B \times C) = P(x \in B, y \in C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbb{E}[g(x)|Y = y] &= \int_{\mathbb{R}} g(x) f_{X|Y}(X|Y) \lambda(dx) \\ \Rightarrow \mathbb{E}[g(x)|Y] &= \left( \int_{\mathbb{R}} g(x) f_{X|Y}(x|y) \lambda(dx) \right) |_{y=Y} \end{aligned}$$

□

**7.12 Satz.** Für jede reellwertige ZV  $X$  existiert die reguläre Version der bedingten Verteilung von  $X$  gegeben  $\mathcal{A}$  (ohne Beweis)

**7.13 Satz.** Sei  $P(\omega, B)$  die reguläre Version von der bedingten W'keit gegeben  $\mathcal{A}$  und sei  $x \in L^1$ . Dann gilt:

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{A}](\omega) = \int_{\Omega} X(\omega') P(\omega, d\omega') \text{ f.s.}$$

*Beweis.* übung

□





# Kapitel 8

## Martingale

**8.1 Definition.** Eine monoton wachsende Folge  $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots$  von  $\sigma$ -Algebren heißt Filtration. Ferner eine Folge von ZVen  $(M_n)$  heißt adaptiert an die Filtration  $(\mathcal{F}_n)$  falls für jedes  $n \geq 0$   $M_n$   $\mathcal{F}_n$ -messbar ist.

**8.2 Definition.** Eine Folge von ZV  $(M_n)$  heißt  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Martingal} \\ \text{Supermartingal} \\ \text{Submartingal} \end{array} \right\}$  bzgl.

Filtration  $\mathcal{F}_n$ , falls:

M1  $(M_n)$  ist an  $\mathcal{F}_n$  adaptiert

M2  $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty, \forall n \geq 0$

M3  $\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] \left\{ \begin{array}{l} = \\ \leq \\ \geq \end{array} \right\}$

8.3 Bemerkung. •  $(M_n)$  ist Supermartingal  $\Leftrightarrow (M_n)$  Submartingal

•  $(M_n)$  ist Martingal  $\Leftrightarrow (M_n)$  Submartingal und Supermartingal

8.4 Beispiel. Seien  $(X_i)$  unabhängige ZVen mit  $\mathbb{E}[|X_i|] < \infty \forall i \geq 1$  Definiere  $M_0 = 0, M_1 = \sum_{i=1}^n X_i, n \geq 1$  und  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n), n \geq 1$

1. Dann ist  $(M_n)$  ein  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Martingal} \\ \text{Supermartingal} \\ \text{Submartingal} \end{array} \right\}$  bzgl.  $\mathcal{F}_n \Leftrightarrow \mathbb{E}[X_i] \left\{ \begin{array}{l} = \\ \leq \\ \geq \end{array} \right\} \forall i \geq 1$

Beweis. M1)  $H_0 = 0$  ist  $\mathcal{F}_0$ -messbar,  $X_n$  ist  $\mathcal{F}_n$ -messbar, falls  $k \leq n$   
 $\Rightarrow \sum_{k=1}^n X_k$  ist  $\mathcal{F}_n$ -messbar.

M2)  $(M_n) \leq \sum_{k=1}^n |X_k| \Rightarrow \mathbb{E}[|M_n|] \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|X_k|]$

M3)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[M_n + X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\ &= {}^1M_n + \mathbb{E}[X_{n+1}] \left\{ \begin{array}{l} = \\ \leq \\ \geq \end{array} \right\} M_n\end{aligned}$$

□

Roulette:

- Am Anfang setzt der Spieler 1 € auf Rot
- Hat er verloren, so setzt er 2 € auf Rot
- Hat er wieder verloren, setzt er 4 € auf Rot  
usw.

Halbmathematisches Modell:  $(X_N)$  unabhängige ZVen mit  $P(X_n = \pm 2^k) = \frac{1}{2}$  ( $X_n$  ist der Gewinn in der n-ten Runde). Definiere  $M_n = \sum_{k=1}^n X_k$  (= Gesamtgewinn in erster n-Spieler). Definiere  $T = (\inf_{min})\{k \geq 1 : x_k > 0\}$

$$\boxed{M_T = 1} \quad \mathbb{E}[T] = \infty$$

**8.5 Lemma.** Ist  $(M_n)$  ein Martingal bzgl.  $(\mathcal{F}_n)$ , so ist  $M_n$  ein Martingal bzgl.  $(\sigma(M_0, M_1, \dots, M_n))$

*Beweis.* M1) ist  $\sigma(M_0, M_1, \dots, M_n)$ -messbar

M2)  $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty$

M3)  $M_k$   $\mathcal{F}_n$ -messbar und  $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_n \forall k \leq n \Rightarrow M_n$  ist  $\mathcal{F}_n$ -messbar  $\forall k \leq n$   
 $\Rightarrow \sigma(M_0, M_1, \dots, M_n) \subseteq \mathcal{F}_n \forall n \geq 1$   $\mathbb{E}[M_{n+1}|\sigma(M_0, M_1, \dots, M_n)] =$   
 $E[\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]|\sigma(M_0, M_1, \dots, M_n)] = {}^2\mathbb{E}[M_n|\sigma(M_0, M_1, \dots, M_n)] =$   
 $M_n$

□

*8.6 Bemerkung.* Wenn man “ $(M_n)$  ist ein Martingal” ohne Angabe der Filtration  $(\mathcal{F}_N)$  sagt, so meint man “ $(M_n)$  ist Martingal bzgl.  $\sigma(M_0, M_1, \dots, M_n)$ ”

**8.7 Lemma.** Sei  $(M_n)$  ein  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Martingal} \\ \text{Supermartingal} \\ \text{Submartingal} \end{array} \right\}$  so gilt:  $\mathbb{E}[M_{n+1}] \left\{ \begin{array}{l} = \\ \leq \\ \geq \end{array} \right\} \mathbb{E}[M_n] \quad \forall n \geq$

0

$$\text{Beweis. } \mathbb{E}[M_{n+1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]] \left\{ \begin{array}{l} = \\ \leq \\ \geq \end{array} \right\} \mathbb{E}[M_n]$$

□

---

<sup>2</sup>Turmeigenschaft

**8.8 Lemma.** Ist  $(M_n)$  ein Martingal bzgl.  $(\mathcal{F}_n)$  so gilt:  $\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_i] = M_i$   $i \leq n$

*Beweis.*  $i = n$   $\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_n] = M_n$

$i = n - 1$   $\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1}$  nach  $(M_3)$

$i \rightarrow i - 1$  : Sei  $\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_i] = M_i$  schon bewiesen  $\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{i-1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_i]|\mathcal{F}_{i-1}] =$   
 $\mathbb{E}[M_i|\mathcal{F}_{i-1}] \stackrel{M_3}{=} M_{i-1}$

□

**8.9 Lemma.** Sei  $(M_n)$  ein Martingal bzgl.  $(\mathcal{F})$ . Ferner sei  $\phi$  eine konvexe Funktion  $(\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ . Ist  $\mathbb{E}[|\phi(M_n)|] < \infty \forall n \geq 0$  so ist  $(\phi(M_n))$  ein Submartingal.

*Beweis.*  $(M_1)$  und  $(M_2)$  sind klar.  $(M_3) : \mathbb{E}[\phi(M_{n+1})|\mathcal{F}_n] \geq \phi(\underbrace{\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]}_{M_n})$

□

**8.10 Bemerkung.** Der Beweis vom Lemma zeigt auch die Aussage: Ist  $(M_n)$  ein Submartingal und  $\phi$  ist eine konvexe, monoton wachsende Funktion mit  $\mathbb{E}[|\phi(M_n)|] < \infty \forall n \geq 1$ , so ist  $(\phi(M_n))_{n \geq 0}$  ein Submartingal.

**8.11 Beispiel.** Wenn  $(M_N)$  Martingal ist, dann sind  $(M_n^2)$ ,  $(|M_n|)$  und  $(M^+)$  Submartingale, falls die entsprechende Interaktionsbedingung erfüllt ist.

**8.12 Beispiel.** Ein Anleger kauft  $M_0$  Aktien einer Firma.  $W_0$  = Wert der Aktien beim Kauf.  $Y_n$  = Kurs einer Aktie  $n$  Tage nach dem Kauf  $W_n$  = Wert von Aktien  $n$  Tagen nach dem Kauf  $M_n$  = Anzahl der Aktien im Besitz des Anlegers zwischen Zeitpunkten  $(n-1)$  und  $n$

Forderung  $M_n$  ist  $\sigma(Y_0, Y_n, \dots, Y_{n-1})$ -messbar. Es ist einfach zu sehen:

$$W_n = W_{n-1} + M_n(Y_n - Y_{n-1}) \text{ Falls } (Y_n) \text{ ein } \left\{ \begin{array}{l} \text{Martingal} \\ \text{Supermartingal} \\ \text{Submartingal} \end{array} \right\} \text{ ist, so}$$

gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_n] &= \mathbb{E}[W_{n-1}] + \mathbb{E}[M_n(Y_n - Y_{n-1})] \\ &= \mathbb{E}[W_{n-1}] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_n(Y_n - Y_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}]] = \mathbb{E}[W_{n-1}] + \mathbb{E}[M_n \mathbb{E}[(Y_n - Y_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}]] \end{aligned}$$

**8.13 Definition.** Die Folge  $(M_n)_{n \geq 1}$  heißt previsibel bzgl.  $(\mathcal{F}_n)$ , falls  $M_n$   $\mathcal{F}_{n-1}$ -messbar ist,  $n \geq 1$

**8.14 Satz.** Sei  $(Y_n)$  ein Supermartingal bzgl.  $(\mathcal{F}_n)$ . Falls  $(M_n)$  [previsibel bzgl.  $(\mathcal{F}_n)$  ist, und  $0 \leq H_n \leq c_n$ , dann ist

$$\left( (H - Y)_n := \sum_{i=1}^n M_i(Y_i - Y_{i-1}) \right)_{n \geq 0} \text{ ein Supermartingal}$$

*Beweis.*  $(M_1)$  und  $(M_2)$  klar.  
 $(M_3)$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(HY)_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[(HY)_n + H_{n+1}(Y_{n+1} - Y_n)|\mathcal{F}_n] \\ &= (HY)_n H_{n+1} \underbrace{\mathbb{E}[(Y_{n+1} - Y_n)|\mathcal{F}_n]}_{\leq 0} \leq (HY)_n\end{aligned}$$

□

*8.15 Bemerkung.* Satz 8.14 lässt sich für Submartingale und Martingale formulieren. Im letzteren Fall reicht es  $|M_n| \leq c_n$  zu fordern.

**8.16 Definition.** Eine ZV  $T : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  heißt Stoppzeit bzgl.  $(\mathcal{F}_n)$ , falls  $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n \forall n \in \mathbb{N}_0$  ( $\Leftrightarrow \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \forall n \in \mathbb{N}_0$ )

*8.17 Beispiel.* Sei  $(M_n)$  irgendeine Folge von ZVen und sei  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Dann ist  $T = \inf\{k \geq 0 : M_k \in A\}$  eine SZ.

*Beweis.*  $\{T = 0\} = \{H_0 \in A\} \in \sigma(M_0)$  Für jedes  $k \leq 1$   $\{T = k\} = \{M_0 = A^c, M_1 = A^c, \dots, M_{n-1} A^c, M_n \in A\} \subset \sigma(M_0, M_1, \dots, M_n)$  □

**8.18 Satz.** Ist die Folge  $(M_n)$  ein Supermartingal und  $T$  eine SZ bzgl. derselben Filtration  $(\mathcal{F}_n)$ , dann ist  $(M_{T \wedge n})_{n \geq 0}$  ein Supermartingal (mit  $a \wedge b = \min\{a, b\}$ )

*Beweis.*  $H_n := \mathbb{1}_{T \geq n}$

$\{T \geq n\} = \left( \underbrace{\{T \leq n-1\}}_{\in \mathcal{F}_{n-1}} \right)^c \in \mathcal{F}_{n-1} \Rightarrow H_n$  ist  $\mathcal{F}_{n-1}$ -messbar  $H_n$  ist previsibel

$$\begin{aligned}(H - M)_n &= \sum_{i=1}^n H_i(M_i - M_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{T \geq i\}} M_i - \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{T \geq i\}} M_{i-1} \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{T \geq i\}} M_i - \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{T \geq j+1\}} M_j = \\ &= \mathbb{1}_{\{T \geq n\}} H_n + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \underbrace{\mathbb{1}_{\{T \geq i\}} - \mathbb{1}_{\{T \geq i+1\}}}_{\mathbb{1}_{\{T=i\}}} \right) M_i - \mathbb{1}_{\{T \geq 1\}} M_0 \\ &= \mathbb{1}_{\{T \geq n\}} H_n + \sum_{i=1}^{n-1} M_i \mathbb{1}_{T=i} - M_0 \underbrace{\mathbb{1}_{\{T \geq 1\}}}_{=1 - \mathbb{1}_{T=0}} \\ &= \mathbb{1}_{\{T \geq n\}} H_n + \sum_{i=0}^n M_i \mathbb{1}_{\{T=i\}} - M_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{T \wedge n} - M_0 &= M_{T \wedge n} \left( \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{T=i\}} + \mathbb{1}_{\{T \geq n\}} \right) - M_0 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} M_{T \wedge n} \mathbb{1}_{T=i} + M_{T \wedge n} \mathbb{1}_{\{T \geq n\}} - M_0 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} M_i \mathbb{1}_{\{T=i\}} + M_n \mathbb{1}_{\{T \geq n\}} - M_0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow M_{T \wedge n} - M_0 = (MM)_n \quad n \geq 0$  Da  $0 \leq H_n \leq 1$  nach Satz 8.14 ist die Folge  $(MH)_n$  ein Supermartingal  $\Rightarrow M_{T \wedge n} - M_0$  ist ein Supermartingal  $\Rightarrow (M_{T \wedge n})$  ist supermartingal.  $\square$

## 8.1 Fast sichere Konvergenz von Martingalen

Sei  $(M_n)$  ein Submartingal,  $a < b \in \mathbb{R}$   $N_0 = -1$

$$N_{2n-1} = \inf\{i > N_{2n-2} : M_i \leq a\}$$

$$N_{2n} = \inf\{i > N_{2n-1} : M_i \geq b\} \text{ für alle } n \geq 1$$

$$M_{N_{2k-1}} \leq a \text{ und } M_{N_{2k}} \geq b \quad \forall k \geq 1$$

Wir werden sagen, dass  $(M_n)$  zwischen  $N_{2n-1}$  und  $N_{2n}$  die n-te Aufkreuzung über Intervall  $(a, b)$  hat. Setze  $U_n = \sup\{k \geq 0 : N_{2k} \leq n\}$  = Anzahl von Aufkreuzungen bis zum Zeitpunkt n.

**8.19 Satz.** Ist  $(M_n)$  ein Submartingal, so gilt  $\mathbb{E}[U_n] \leq \frac{\mathbb{E}[(M_n - a)^+] - \mathbb{E}[(M_0 - a)^+]}{b - a}$

*Beweis.*  $\phi(x) := a + (x - a)^+$   $\phi$  ist monoton wachsend und konvex. Dann, nach 8.10, ist  $(Y_n := a + (M_n - a)^+)_{n \geq 0}$  ein Submartingal. Ausserdem,  $(M_n)$  und  $(Y_n)$  haben die gleiche Anzahl von Aufkreuzungen über  $(a, b)$ . Definiere  $H_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } N_{2k-1} \leq i \leq N_{2k} \text{ für ein } k \geq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$  Es gilt:  $(b - a)U_n \leq (HY)_n \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[U_n] &\leq \frac{\mathbb{E}[MY_n]}{(b-a)} \quad (MY)_n = \sum_{i=1}^n M_i(Y_i - Y_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (Y_i - Y_{i-1}) = \\
&= \sum_{i=1}^n (1 - M_i)(Y_i - Y_{i-1}) = Y_n - Y_0 - ((1 - M)Y)_n \text{ Ausserdem gilt: } \{1 - M_i = 0\} = \{M_i = 1\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{N_{2k-1} < i < N_{2k}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\{N_{2k-1} < i - 1\} \cap \{N_{2n} > i - 1\}) \\
&\Rightarrow M_n \text{ ist previsibel bzgl } (\mathcal{F}_n) \xrightarrow{\text{Satz 8.14}} ((1 - M)Y)_m \text{ ist Submartingal} \\
&\xrightarrow{\text{Lemma 8.7}} \mathbb{E}[(1 - M)Y_n] \geq \mathbb{E}[(1 - H)Y_n] = 0 \Rightarrow \mathbb{E}[(HY)_n] = \mathbb{E}[Y_n] - \\
&\mathbb{E}[Y_0] - \mathbb{E}[(1 - M)Y_n] \leq \mathbb{E}[Y_n] - \mathbb{E}[Y_0] = \mathbb{E}[(M_n - a)^+] - \mathbb{E}[(M_0 - a)^+] \quad \square
\end{aligned}$$

**8.20 Satz** (Martingal Konvergenzsatz). Sei  $(M_n)$  ein Submartingal mit  $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[M_n^+] < \infty$ . Dann konvergiert  $M_n$  f.s. gegen eine ZV  $M_\infty$  mit  $\mathbb{E}[|M_\infty|] < \infty$

*Beweis.*  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

$$\mathbb{E}[U_n] \leq \frac{\mathbb{E}[M_n^+] + |a|}{b - a} \quad ((M_n + a)^+ \leq M_n^+ + |a|, \mathbb{E}[(M_0 - a)^+] > 0)$$

$U_n \uparrow U \in [0, \infty]$  Nach Satz von Monotoner Konvergenz

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[U] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[U_n] \leq \sup_n \frac{\mathbb{E}[M_n^+] + |a|}{b - a} < \infty \\
&\Rightarrow u < \infty \text{ f.s. } (P(u = \infty) = 0) \\
&\Rightarrow P\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} M_n \leq a < b \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} M_n\right) = 0 \\
&\Rightarrow P\left(\bigcup_{a < b \in \mathbb{Q}} \{\liminf_{n \rightarrow \infty} M_n \leq a < b \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} M_n\}\right) = 0 \\
&\Rightarrow P(\liminf M_n < \limsup M_n) = 0 \\
&\Rightarrow P(\liminf M_n = \limsup M_n) = 1 \\
&\Rightarrow M_n \text{ konvergiert f.s. } M_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} M_n
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[M_\infty^+] = \mathbb{E}[\lim M_n^+] = \mathbb{E}[\liminf M_n] \stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \liminf \mathbb{E}[M_n^+] < \infty$$

$$\mathbb{E}[M_\infty^-] \leq \liminf \mathbb{E}[M_n^-]$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[M_n^-] = \mathbb{E}[M_n^+] - \mathbb{E}[M_n] \leq \mathbb{E}[M_n^+] - \mathbb{E}[M_0] \Rightarrow \sup_n \mathbb{E}[M_n^-] < \infty$$

□