

$\phi_X^{(k)}(0)$  ist endlich  $\Rightarrow \mathbb{E}[|X|^k] < \infty$  Durrett Ch.2 Section 2.3 exercise 3.17:  
 Ein Beispiel für  $\phi'(0) < \infty$  aber  $\mathbb{E}[|X|] = \infty$

**5.20 Satz.** Ist  $\phi^{(2n)}(0)$  endlich, so ist  $\mathbb{E}[|X|^{(2n)}] < \infty$

*Beweis: nur Fall  $n=1$ .*

$$\begin{aligned}\phi''(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[ \frac{\phi'(2h) - \phi'(0)}{2h} + \frac{\phi'(0) - \phi'(2h)}{2h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi'(2h) - \phi'(-2h)}{4h} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi'(2h) - 2\phi(0) + \phi'(-2h)}{4h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{4h^2} \mathbb{E} \left[ e^{i(2h)X} - 2 + e^{-i(2h)X} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{4h^2} \mathbb{E} \left[ \left( e^{ihX} - e^{-ihX} \right)^2 \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{4h^2} \mathbb{E} \left[ \left( (i2) \sin(hX) \right)^2 \right] = - \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ X^2 \left( \frac{\sin(hX)}{hX} \right)^2 \right] \\ &\leq - \mathbb{E} \left[ X^2 \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(hX)}{hX} \right)^2 \right] = - \mathbb{E} [X^2]\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X^2] \leq -\phi''(0)$$

□

### 5.3.1 Inversionssätze und Eindeutigkeitssatz

**5.21 Satz.** Sei  $X$  eine ZV mit Charakteristischer Funktion  $\phi$ . Für alle Stetigkeitspunkte  $a < b$  von  $F_X$  gilt:

$$F_X(b) - F_X(a) = \lim_{\sigma^2 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{-\sigma^2 t^2 / 2} \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it} dt$$

**5.22 Lemma.** Sei  $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  und unabhängig von  $X$ . Dann hat  $X + Y$  die Lebesgue-Dichte

$$f^{(0)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{-\sigma^2 t^2 / 2} e^{-itx} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

*Beweis.* Verteilung von  $X + Y$  = Faltung von  $P_X$  und  $P_Y$ .

$$f^{(\sigma)}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_Y(x - y) P_X(dy) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}} P_X(dy)$$

$$(Z \sim \mathcal{N}(0, \delta^2) \Rightarrow \phi_Z(t) = e^{-\delta^2 t^2 / 2})$$

$$\Rightarrow e^{\frac{t^2}{2\sigma^2}} = \text{Charakteristische Funktion von } \mathcal{N}(0, \frac{1}{\sigma^2})$$

$$\Rightarrow e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1}{\sigma^2}}} e^{-\sigma^2 x^2 / 2} dx$$

Mit  $t = (y-x)$ :

$$\begin{aligned}
 f_X^{(\sigma)}(x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1}{\sigma^2}}} e^{i(y-x)u - u^2\sigma^2/2} du \right) P_x(dy) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{i(y-x)u - u^2\sigma^2/2} du \right) P_x(dy) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left( \underbrace{\int_{\mathbb{R}} (e^{iyu} P_x(dy))}_{=\phi(u)} \right) e^{-i(xu - u^2\sigma^2/2)} du \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi(u) e^{-i(xu - u^2\sigma^2/2)} du
 \end{aligned}$$

□

*Beweis Satz 5.21.*

$$\begin{aligned}
 F_{X+Y}(b) - F_{X+Y}(a) &= \int_a^b f^{(\sigma)}(x) dx = \int_a^b \frac{1}{2\pi} \left( \int_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} e^{-itx} dt \right) dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \left( \int_a^b e^{-itx} dx \right) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \left( \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it} \right) dt
 \end{aligned}$$

$P_{X+Y} = P_{X+\sigma Z}$ , wobei  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $Z$  ist unabhängig von  $X$

$$\Rightarrow X + \sigma Z \xrightarrow{f.s.} X \text{ für } \sigma \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow X + \sigma Z \xrightarrow{w} X \Rightarrow X + Y \xrightarrow{w} X \text{ für } \sigma \rightarrow 0,$$

d.h.  $F_{X+Y}(x) \rightarrow F_X(x)$  für jede Stetigkeitsstelle von  $F_X$

$$\Rightarrow F_{X+Y}(b) - F_{X+Y}(a) \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} F_X(b) - F_X(a)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Also, } F_X(b) - F_X(a) &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} (F_{X+Y}(b) - F_{X+Y}(a)) = \\
 &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{-\sigma^2 t^2/2} \left( \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it} \right) dt
 \end{aligned}$$

□

**5.23 Korollar** (Eindeutigkeitssatz). *Seien  $X$  und  $Y$  ZVen. Dann gilt:*

$$\phi_X(t) = \phi_Y(t) \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow P_X = P_Y$$

$\Rightarrow \{e^{itx}, t \in \mathbb{R}\}$  ist trennende Klasse.

**5.24 Korollar.** Ist  $\int_{\mathbb{R}} |\phi_X(t)| dt < \infty$ , so hat  $P_X$  die Lebesgue-dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \phi(t) dt \left( = \lim_{\sigma \rightarrow 0} f^{(\sigma)}(x) \right)$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} F_X(b) - F_X(a) &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{-\sigma^2 t^2 / 2} \left( \int_a^b e^{-itx} dx \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) \left( \int_a^b e^{-itx} dx \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_a^b \left( \int_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{-itx} dt \right) dx \\ &= \int_a^b \underbrace{\left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{-itx} dt \right)}_{=f(x)} dx = \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Verteilung  $P_X$  absolut stetig mit der Dichte  $f(x)$  □

5.25 Beispiel.  $\phi(t) = e^{-|t|}, t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \phi(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-|t|} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-itx+t} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-itx-t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{t(1-ix)} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-t(1+ix)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-ix} + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1+ix} = \frac{1}{\pi(1+X^2)}, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Diese Verteilung heißt Cauchy-Verteilung.  $xP(|X| > x) \rightarrow \text{Const} > 0$

$\Rightarrow$  kein schwaches Gesetz der großen Zahlen.  $\exists \{a_n\} \frac{S_n}{n} - a_n \xrightarrow{P}$  gilt nicht.  
 $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ,

$$\phi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \phi_{S_n} \left( \frac{t}{n} \right) = \prod_{i=1}^n \phi_{X_i} \left( \frac{t}{n} \right) = \prod_{i=1}^n e^{-|\frac{t}{n}|} = e^{-|t|}$$

$\Rightarrow \frac{S_n}{n}$  hat Cauchy verteilung

**5.26 Satz** (Stetigkeitssatz von Levy). Sei  $(X_i)$  eine Folge von ZVen und  $\phi_{X_i}(t) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \phi(t) \forall t \in \mathbb{R}$ . Dann sind äquivalent:

---

<sup>10</sup>dominierte Konvergenz

<sup>11</sup>Fubini

(1)  $\phi(t)$  ist eine Cauchy/Charakteristische (?) Funktion

(2)  $\phi$  ist stetig an der Stelle 0

(3)  $\{P_{X_n}\}$  ist straff.

(4)  $P_{X_n}$  konvergiert schwach

**5.27 Korollar.**

$$X_n \xrightarrow{w} X \Leftrightarrow \phi_{X_n}(t) \rightarrow \phi_X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

**Satz** (Bochner-Khinchine-Satz). Eine stetige Funktion  $\phi$  mit  $\phi(0) = 1$  ist genau dann eine Charakteristische Funktion, wenn

$$\sum_{i,j=1}^n \phi(t_i - t_j) \lambda_i \overline{\lambda_j} \geq 0 \quad \forall t_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \in \mathbb{C}, \forall n \geq 1$$

Satz 5.26.

(1)  $\rightarrow$  (2) Klar.

(3)  $\rightarrow$  (4) Da die Klasse  $\{e^{itx}\}$  eine trennende Familie ist, folgt dies aus dem Satz 5.12

(3)  $\rightarrow$  (1)  $\{P_n\}$  ist straff  $\Rightarrow$  <sup>5</sup>  $\exists P_{n_k}$  und  $P: P_{n_k} \xrightarrow{w} P$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{itx} P_{n_k}(dx)}_{\phi_{X_{n_k}}(t)} &\xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} P(dx) \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ &\xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} P(dx) = \phi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \phi$  ist eine charakteristische Funktion.

(2)  $\rightarrow$  (3) : Lemma 5.28

$$\begin{aligned} \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} P\left(|X_n| > \frac{2}{u}\right) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{-n}^n (1 - \phi_X(t)) dt \\ &= \frac{1}{n} \int_{-n}^n (1 - \phi(t)) dt \end{aligned}$$

$\phi$  ist stetig an der Stelle 0  $\Rightarrow$  Wir können so ein  $u_\epsilon$  wählen, dass

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P\left(|X_n| > \frac{2}{u}\right) \leq \epsilon \quad \forall u \leq u_\epsilon \Rightarrow \{P_{X_n}\}$$

ist straff

---

<sup>5</sup>Satz von Prokhorov

□

**5.28 Lemma.** Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit charakteristischer Funktion  $\phi_X$ . Für jedes  $u > 0$ :

$$P\left(|X| > \frac{2}{u}\right) \leq \frac{1}{u} \int_{-u}^u (1 - \phi_X(t)) dt$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} \int_{-u}^u (1 - \phi_X(t)) dt &= \frac{1}{u} \int_{-u}^u \left( \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{itx}) P_X(dx) \right) dt \\ &= \frac{1}{u} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{itx}) dt \right) P_X(dx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-u}^u (1 - e^{itx}) dt &= 2u - \int_{-u}^u e^{itx} dt = 2u - \int_{-u}^u \cos(tx) dt - i \underbrace{\int_{-u}^u \sin(tx) dt}_{=0} \\ &= 2u - 2 \int_{-u}^u \cos(tx) dt = 2u \left( 1 - \frac{\sin(xu)}{ux} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{u} \int_{-u}^u (1 - \phi_X(t)) dt &= 2 \int_{\mathbb{R}} \left( 1 - \frac{\sin(ux)}{ux} P_x(dx) \right) \\ &\geq 2 \int_{\{|x| \geq \frac{2}{u}\}} \left( 1 - \frac{\sin(ux)}{ux} \right) P_x(dx) \\ &\geq 2 \int_{\{|x| \geq \frac{2}{u}\}} \left( 1 - \frac{1}{ux} \right) P_x(dx) \\ &\geq 2 \frac{1}{2} \int_{|x| \geq \frac{2}{u}} P_X dx \\ &= P\left(|X| \geq \frac{2}{u}\right) \end{aligned}$$

□

**5.29 Satz.** Seien  $(X_i)_{i \geq 1}$  iid ZVen mit der charakteristischen Funktion  $\phi(t)$ . Ist  $\phi'(0) = ia$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , so gilt:  $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} a$ .

*Beweis.*  $\phi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \phi_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \left(\phi\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$

$\phi$  ist differenzierbar  $\Rightarrow \phi(\tau) = \phi(0) + \phi'(0)\tau + o(\tau)$ ,  $\tau \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \phi\left(\frac{t}{n}\right) = 1 + ia\frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ für } n \rightarrow \infty \text{ und jedes } t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \left(\phi\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n &= \left(1 + ia\frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{ita} \\ &\Rightarrow {}^6\phi_{\frac{S_n}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{ita}; \forall t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Stetigkeitssatz von Levy  $\Rightarrow \frac{S_n}{n}$  konvergiert schwach, aber  $e^{ita}$  ist charakteristische Funktion von ZV  $Y$ :  $P(Y = a) = 1 \Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{w} a \Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} a \quad \square$

---

${}^6\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n \rightarrow e^x$  falls  $x_n \rightarrow x$

## Kapitel 6

# Zentraler Grenzwertsatz

### 6.1 Klassischer Zentraler Grenzwertsatz

Seien  $(X_i)_{i \geq 1}$  iid mit  $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$  und  $\sigma^2 := \text{Var}[X_1] \in (0, \infty)$ .

**6.1 Satz.** Ist  $\sigma^2 \in (0, \infty)$ , so gilt

$$\frac{S_n - n\mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0, 1)$$

Falls  $\sigma^2 = 0$ , so ist  $X_1$  eine nichtzufällige Zufallsvariable, d.h.

$$P(X_1 = \mathbb{E}[X_1]) = 1 \Rightarrow P(S_n = n\mathbb{E}[X_1]) = 1$$

*Beweis.* Wir dürfen annehmen, dass  $\mathbb{E}[X_1] = 0$  und  $\text{Var}[X_1] = 1$ . (Sonst gehen wir zu ZVen  $Y_i = \frac{X_i - \mathbb{E}[X_i]}{\sigma}$

$$\phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \phi_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

$$\mathbb{E}[X_1^2] = 1 \Rightarrow \phi_{X_1}(\tau) = 1 + \phi'(0)\tau + \phi''(0)\frac{\tau^2}{2} + o(\tau^2) \text{ für } \tau \rightarrow 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{E}[X_1] = 0 \Rightarrow \phi'(0) = 0 \\ \mathbb{E}[X_1^2] = 1 \Rightarrow \phi''(0) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ für } n \rightarrow \infty$$
$$\Rightarrow \left(\phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}$$
$$\Rightarrow \phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$e^{-\frac{t^2}{2}}$  ist die charakteristische Funktion von  $\mathcal{N}(0, 1)$  Nach Stetigkeitssatz von Levy,  $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0, 1)$  □

## 6.2 Verallgemeinerung vom ZGWS

**6.2 Definition.** Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei  $k_n \in \mathbb{N}$  und seien  $(X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,k_n})$  reelle Zufallsvariablen. Wir nennen  $(X_{n,l}, n \in \mathbb{N}, l \leq k_n)$  ein Dreiecksschema. Sei  $S_n = \sum_{l=1}^{k_n} X_{n,l}$

$$\begin{array}{ccccccc} X_{1,1} & \cdots & X_{1,k_1} & & & & \\ X_{2,1} & \cdots & \cdots & X_{2,k_2} & & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ X_{n,1} & & \cdots & \cdots & & & X_{n,k_n} \end{array}$$

Das Dreiecksschema heißt:

**unabhängig** , falls  $(X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n})$  unabhängig sind,  $\forall n \geq 1$

**zentriert** , falls  $X_{n,l} \in L^1$  und  $\mathbb{E}[X_{n,l}] = 0 \forall n, l$

**normiert** , falls  $X_{n,l} \in L^2$  und  $\sum_{l=1}^{k_n} \text{Var}[X_{n,l}] = 1$  (Mit anderen Worten  $\text{Var}[S_n] = 1$ , falls unabhängig)

**6.3 Definition.** a) Ein zentriertes Dreiecksschema heißt asymptotisch vernachlässigbar, falls für jedes  $\epsilon > 0$  :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{l \leq k_n} P(|X_{n,l}| > \epsilon) = 0$

b) Ein zentriertes Dreiecksschema erfüllt die Lindeberg-Bedingung, falls für jedes  $\epsilon > 0$

$$\frac{1}{\text{Var}[S_n]} \sum_{l=1}^{k_n} \mathbb{E} \left[ X_{n,l}^2 \mathbb{1}_{\{X_{n,l}^2 > \epsilon^2 \text{Var}[S_n]\}} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

**6.4 Satz** (Satz von Lindeberg-Feller). *Sie  $(X_{n,l})$  ein unabhängiges, zentriertes und normiertes Dreiecksschema. Dann sind äquivalent:*

1)  $(X_{n,l})$  erfüllt die Lindeberg-Bedingung

2)  $(X_{n,l})$  ist asymptotisch, vernachlässigbar und  $S_n \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0, 1)$

*Beweis.* Klenke 15.5

□

$(X_i)$  iid mit  $\sigma^2 \in (0, \infty)$

$$Y_{n,l} = \frac{X_l - \mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n\sigma^2}}, \quad l \leq n (= k_n)$$



$\Rightarrow (Y_{n,l})$  ein zentriertes, norm. und unabh. Dreiecksschema.  $\text{Var}[S_n] = 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{l=1}^n \mathbb{E} \left[ Y_{n,l}^2 \mathbb{1}_{\{Y_{n,l}^2 > \epsilon^2\}} \right] &= n \mathbb{E} \left[ Y_{n,1}^2 \mathbb{1}_{\{Y_{n,1}^2 > \epsilon^2\}} \right] \\ &= n \mathbb{E} \left[ \frac{(X_1 - \mathbb{E}[X_1])^2}{n\sigma^2} \mathbb{1}_{\frac{(X_1 - \mathbb{E}[X_1])^2}{n\sigma^2} > \epsilon^2} \right] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E} \left[ (X_1 - \mathbb{E}[X_1])^2 \mathbb{1}_{\{(X_1 - \mathbb{E}[X_1])^2 > n\sigma^2\epsilon^2\}} \right] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

nach dominierter Konvergenz.

$$\xrightarrow{\text{Satz 6.4}} \frac{\sum_{l=1}^n X_l - n\mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n\sigma^2}} = \sum_{l=1}^n \frac{X_l - \mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n\sigma^2}} = \sum_{l=1}^n Y_{n,l} \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0, 1)$$

**6.5 Definition.** Man sagt, dass das Schema die Lyapunov-Bedingung erfüllt, falls für ein  $\delta > 0$

$$\frac{1}{(\text{Var}[S_n])^{1+\frac{\delta}{2}}} \sum_{l=1}^{k_n} \mathbb{E} \left[ |X_{n,l}|^{2+\delta} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Lyapunov-Bedingung  $\Rightarrow$  Lindeberg-Bedingung:

$$x^2 \mathbb{1}_{\{|x| > a\}} \leq a^{-\delta} |x|^{2+\delta} \mathbb{1}_{\{|x| > a\}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ X_{n,l}^2 \mathbb{1}_{\{X_{n,l}^2 > \epsilon^2 \text{Var}[S_n]\}} \right] &= \mathbb{E} \left[ X_{n,l}^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,l}| > \epsilon (\text{Var}[S_n])^{\frac{1}{2}}\}} \right] \\ &\leq \epsilon^{-\delta} (\text{Var}[S_n])^{-\frac{\delta}{2}} \mathbb{E} \left[ |X_{n,l}|^{2+\delta} \mathbb{1}_{\{\dots\}} \right] \\ &\leq \epsilon^{-\delta} (\text{Var}[S_n])^{-\frac{\delta}{2}} \mathbb{E} \left[ |X_{n,l}|^{2+\delta} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\text{Var}[S_n]} \sum \mathbb{E} \left[ X_{n,l}^2 \mathbb{1}_{\{X_{n,l}^2 > \epsilon^2 \text{Var}[S_n]\}} \right] \leq \epsilon^{-\delta} \sum_{l=1}^{k_n} \frac{\mathbb{E} \left[ |X_{n,l}|^{2+\delta} \right]}{(\text{Var}[S_n])^{1+\frac{\delta}{2}}}$$

**6.6 Beispiel.** Seien  $(X_i)$  unabhängige ZVen mit  $P(X_i = \pm i^\alpha) = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  
Definiere  $Y_{n,l} = \frac{X_l}{\sqrt{B_n}}$ ,  $l \leq n$ ,

$$B_n = \text{Var} \left[ \sum_{l=1}^n X_l \right] = \sum_{l=1}^n \text{Var}[X_l] = \sum_{l=1}^n l^{2\alpha}$$

$\Rightarrow (Y_{n,l})$  ist ein unabhängiges zentriertes und normiertes Dreiecksschema.

Frage: Für welche  $\alpha$  konvergiert  $S_n$  gegen  $\mathcal{N}(0, 1)$ ?

$\alpha > \frac{-1}{2}$ . Hier gilt:  $B_n = \sum_{l=1}^n l^{2\alpha} \sim \frac{1}{2\alpha+1} n^{2\alpha+1}$  für  $n \rightarrow \infty$ . Ausserdem

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \mathbb{E} \left[ |Y_{n,l}|^3 \right] &= \sum_{l=1}^n \mathbb{E} \left[ \frac{|X_l|^3}{B_n^{\frac{3}{2}}} \right] = \frac{1}{B_n^{\frac{3}{2}}} \sum_{l=1}^n l^{3\alpha} \\ &\sim \frac{1}{B_n^{\frac{3}{2}}} \begin{cases} \text{Const,} & \text{falls } \alpha < -\frac{1}{3} \\ \log n, & \text{falls } \alpha = -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3\alpha+1} n^{3\alpha+1}, & \text{für } \alpha > -\frac{1}{3} \end{cases} \sim 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \text{Lyapunov-Bedingung mit } \delta = 1 \Rightarrow \sum_{l=1}^n Y_{n,l} \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0, 1) \\ &\Rightarrow \frac{\sum_{l=1}^n X_l}{\sqrt{B_n}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1) \\ &\Rightarrow \frac{\sqrt{2\alpha+1} \sum_{l=1}^n X_l}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}} \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha = -\frac{1}{2} \text{ Hier } B_n &\sim \log n \\ \sum_{l=1}^n \mathbb{E} \left[ |Y_{n,l}|^3 \right] &= \frac{1}{B_n^{\frac{3}{2}}} \sum_{l=1}^n l^{-\frac{3}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ &\Rightarrow \frac{\sum_{l=1}^n X_l}{\sqrt{\log n}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1) \end{aligned}$$

$\alpha < -\frac{1}{2}$   $B_n = \sum_{l=1}^n l^{2\alpha}$  bleibt beschränkt. Ausserdem  $\sum_{l=1}^n \mathbb{E} \left[ |Y_{n,l}|^{2+\delta} \right] = \frac{1}{B_n^{\frac{3}{2}}} \sum_{l=1}^n l^{\alpha(2+\delta)} \geq c > 0 \Rightarrow$  Lyapunov-Bedingung ist *nicht* erfüllt.  
Nach dem Kolmogorov'schen 3-Reihen-Satz konvergiert

$$\sum_{l=1}^n X_l \xrightarrow{\text{fast sicher}} \sum_{l=1}^{\infty} X_l$$

$$\begin{aligned} \phi_{\sum_{l=1}^n X_l}(t) &= \prod_{l=1}^n \phi_{X_l}(t) = \prod_{l=1}^n \mathbb{E} \left[ e^{-itX_l} \right] = \prod_{l=1}^n \left( \frac{1}{2} e^{itl^\alpha} + \frac{1}{2} e^{-itl^\alpha} \right) \\ &= \prod_{l=1}^n \cos(tl^\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underbrace{\prod_{l=1}^{\infty} \cos(tl^\alpha)}_{\text{hat Nullstellen}} \neq \underbrace{e^{-ct^2}}_{\text{immer positiv}} \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Bleibt unbeschränkt