Mathematisches Institut
der Universität München
Vitali Wachtel

Sommersemester 2009
Blatt 1
24.04.2009

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsbeispiele:

T1. Sei $\Omega = \{-2, -1, 0, 1, 2, \text{blau}\}$. Sei $\epsilon := \{\{-2, -1\}\}$.

(a) Geben Sie $\sigma(\epsilon)$ explizit an.

(b) Beschreiben Sie alle möglichen Wahrscheinlichkeitsmaße bzgl. $\sigma(\epsilon)$.

(c) Beschreiben Sie alle möglichen Zufallsvariablen $X : (\Omega, \sigma(\epsilon)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

T2. Sei $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathcal{A}, \mathcal{A}' \subset 2^\Omega$ und $B, B' \in 2^\Omega$. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen

(a) $\sigma(\mathcal{A}) \cup \sigma(\mathcal{A}')$ ist eine σ-Algebra.

(b) $\sigma(\mathcal{A}) \cap \sigma(\mathcal{A}') = \sigma(\mathcal{A} \cap \mathcal{A}')$

(c) $\sigma(B) \cap \sigma(B') = \sigma(B \cap B')$, wobei $\sigma(B) := \sigma(\{B\})$

(d) $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}' \Rightarrow \sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A}')$

(e) $B \subset B' \Rightarrow \sigma(B) \subset \sigma(B')$

T3. Sei nun $\Omega = \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{F} := \{A \subset \Omega : |A| < \infty \text{ oder } |A^c| < \infty\}$$

eine Algebra, aber keine σ-Algebra ist.

(b) Geben Sie die von $\mathcal{F}$ erzeugte σ-Algebra explizit (ähnlich wie $\mathcal{F}$) an und beweisen Sie Ihre Vermutung.

→ Seite 2

Hausaufgaben:

H1. Geben Sie einen Meßraum $(\Omega, \mathcal{A})$ und eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ an, so dass X nicht borelmessbar, aber X^2 borelmessbar ist.

H2. Sei $\Omega \neq \emptyset$.

(a) Zeigen Sie: $\mathcal{A}$ ist genau dann eine σ-Algebra bzgl. Ω, wenn

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$

(ii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A - B \in \mathcal{A}$

(iii) $A_n \in \mathcal{A} \ \forall n \geq 1 \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$.

(b) Sei $\mathcal{B}$ ein Mengensystem mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\emptyset \in \mathcal{B}$

(ii) $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A - B \in \mathcal{B}$

(iii) $A_n \in \mathcal{B} \ \forall n \geq 1 \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{B}$.

Zeigen oder widerlegen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra ist.

H3. Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Meßbraum und $X, Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ Abbildungen. Zeigen Sie

(a) X ist genau dann borelmessbar, wenn für alle rationalen Zahlen q die Menge $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < q\}$ Element von $\mathcal{A}$ ist.

(b) Sind X, Y Zufallsvariablen, dann ist $X + Y$ auch eine Zufallsvariable.

Abgabe: Am Dienstag, den 05.05.2009, 12.10 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.