MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
VITALI WACHTEL

Sommersemester 2009
Blatt 2
30.04.2009

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsbeispiele:

T1. Sei $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$ und $\overline{\mathcal{B}} := \{A \subset \overline{\mathbb{R}} : A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\overline{\mathcal{B}}$ eine σ-Algebra ist.

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ eine Messraum und $f_n : \Omega \to [-\infty, \infty]$, $n \geq 1$, $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}$ messbare Funktionen. Zeigen Sie:

(b) $\sup_{n\geq 1} f_n$ und $\inf_{n\geq 1} f_n$ sind messbare Funktionen.

(c) $\limsup_{n\geq 1} f_n$ und $\liminf_{n\geq 1} f_n$ sind messbare Funktionen.

T2. (a) Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in I$ und $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$ an, so dass $\mathbb{P}(A_i) = 1\ \forall i \in I \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcap_{i\in I} A_i) = 1$ falsch ist.

(b) Sei $\Omega := \{0, 1, 2, 3\}$, $\epsilon = \{\{0, 1\}, \{1, 2\}\}$ und $\mathcal{A} = \sigma(\epsilon)$.

(i) Geben Sie eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \Omega'$ an, so dass $\sigma(\epsilon) = \sigma(X)$

(ii) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Abbildung

$$P : \epsilon \to [0, 1] \quad A \mapsto \frac{1}{2}$$

eindeutig zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß fortgesetzt werden kann.

T3. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in \mathcal{A}$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass

$$\mathcal{D} := \{B \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A)\}$$

(a) ein λ-System ist.

(b) ein π-System ist.

→ Seite 2

Hausaufgaben:

H1. Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ eine Messraum, $A_i \in \mathcal{A}$, $i \geq 1$, und $f_n : \Omega \to [-\infty, \infty]$, $n \geq 1$, $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}$ messbare Funktionen. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $\limsup_{n\to\infty} A_n := \{\omega \in \Omega : \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = 1\}$ entspricht der Menge $\{\omega \in \Omega : \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = \infty\}$.

(b) $\{f_n$ konvergiert gegen einen Wert in $[-\infty, \infty]\} := \{\limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n\} \in \mathcal{A}$

Hinweis zu (b): Zeigen Sie zuerst

$$\begin{aligned} &\{f_n \text{ konvergiert gegen einen Wert in } [-\infty, \infty]\}^c \\ = &\bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}:a<b} \{\liminf_{n\to\infty} f_n < a < b < \limsup_{n\to\infty} f_n\}\,. \end{aligned}$$

H2. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A,\ B,\ A_n \in \mathcal{A}$, $n \geq 1$. Zeigen Sie folgenden elementaren Eigenschaften von $\mathbb{P}$:

(a) $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

(b) $\mathbb{P}(\bigcup_{n\geq 1} A_n) \leq \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n)$

(c) $\mathbb{P}(A_n) = 1\ \forall n \geq 1 \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcap_{n\geq 1} A_n) = 1$

(d) $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \ldots \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\bigcup_{n\geq 1} A_n)$

H3. Ein Mengensystem $\mathcal{M} \subset 2^\Omega$ mit $\Omega \neq \emptyset$ heißt monotone Klasse, falls es folgende Eigenschaften erfüllt:

(a) $A_1,\ A_2,\ \ldots \in \mathcal{M}, A_1 \subset A_2 \subset \ldots \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{M}$

(b) $A_1,\ A_2,\ \ldots \in \mathcal{M}, A_1 \supset A_2 \supset \ldots \Rightarrow \bigcap_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{M}$.

Sei $\mathcal{M}$ eine monotone Klasse und $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ eine Algebra. Zeigen Sie $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$.

Hinweis: Betrachten Sie die kleinste dieser monotonen Klassen und zeigen Sie, dass diese eine σ-Algebra ist.

Abgabe: Am Dienstag, den 12.05.2009, 12.10 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.