Mathematisches Institut
der Universität München
Vitali Wachtel

Sommersemester 2009
Blatt 3
08.05.2009

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsbeispiele:

T1. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Maßraum. Zeigen Sie:
Für eine reelle Zufallsvariable X gilt

$$\mathbb{E}(|X|) < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X| > n) < \infty\,.$$

T2. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Maßraum. Zeigen Sie:

(a) Für eine Zufallsvariable X mit Werten in $\{0, 1, 2, \ldots\}$ gilt

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq n)\,.$$

(b) Für eine Zufallsvariable X mit Werten in $[0, \infty]$ gilt

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > t)dt\,.$$

T3. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Maßraum und X eine reelle Zufallsvariable. Zeigen Sie folgende Implikation

$$\mathbb{E}(|X|) < \infty \overset{!}{\Rightarrow} \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \mathbb{P}(A) < \delta \Rightarrow \mathbb{E}(|X| \mathbb{1}_A) < \epsilon$$

→ Seite 2

Hausaufgaben:

H1. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Maßraum. Zeigen Sie:

Für eine Zufallsvariable X mit Werten in $[0, \infty]$ gilt

$$\mathbb{E}(X^p) = p \int_0^\infty t^{p-1} \mathbb{P}(X > t) dt \, .$$

H2. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Maßraum und X eine reelle Zufallsvariable.

(a) Sei X poissonverteilt, d.h.

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \text{ für } n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\} \, .$$

Berechnen Sie den Erwartungswert von X und $\mathbb{E}(X^2)$.

(b) Sei X exponentialverteilt, d.h. X besitzt die Lebesgue-Dichte $\lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\{t \geq 0\}}$. Berechnen Sie die Varianz von X.

H3. Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und μ, ν zwei endliche Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie:

$$\nu << \mu \overset{!}{\iff} \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) < \delta \Rightarrow \nu(A) < \epsilon$$

Abgabe: Am Dienstag, den 19.05.2009, 12.10 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.