

## Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie

### Übungsbeispiele:

T1. Seien  $X_1, \dots, X_n$  u.i.v. und gleichverteilt auf  $]a, b[$ . Berechnen Sie die Dichte der Zufallsvariablen (Messbarkeit muss nicht gezeigt werden)  $\min_{1 \leq i \leq n} X_i$  und  $\max_{1 \leq i \leq n} X_i$ .

T2. Seien  $X, Y$  Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}((X, Y) \in C) = \int_C \underbrace{f_{X,Y}(x, y)}_{\geq 0} d(\mu \otimes \nu)(x, y)$$

für alle messbaren Mengen  $C$ . Zeigen Sie

(a) Die Funktionen

$$f_X : x \mapsto \int f_{X,Y}(x, y) d\nu(y)$$

und

$$f_Y : y \mapsto \int f_{X,Y}(x, y) d\mu(x)$$

sind Dichten bzgl.  $\mu$  und  $\nu$  der Marginalverteilungen  $\mathbb{P}(X \in \cdot)$  und  $\mathbb{P}(Y \in \cdot)$ .

(b)  $X, Y$  unabh.  $\iff f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$   $\mu \otimes \nu$ -f.s.

T3. Seien  $X, Y$  integrierbare Zufallsvariablen. Zeigen oder widerlegen Sie

(a) Sind  $X, Y$  unabhängig, dann gilt  $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ .

(b) Gilt  $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ , dann sind  $X, Y$  unabhängig.

→ Seite 2

## Hausaufgaben:

H1. Seien  $X, X_1, \dots, X_n$  unabhängige reelle Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

- (a) Das Paar  $(X, X)$  ist genau dann unabhängig, wenn  $X$  fast sicher konstant ist.
- (b) Die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  sind genau dann fast sicher konstant, wenn  $\sum_{i=1}^n X_i$  fast sicher konstant ist.

H2. Seien  $X, Y$  reelle Zufallsvariablen und  $(X, Y)$  hat die Lebesgue-Dichte  $e^{-x-y} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^2}$ . Zeigen Sie

- (a) Die Zufallsvariablen  $X + Y$  und  $X/Y$  sind unabhängig.
- (b) Die Zufallsvariablen  $X + Y$  und  $X/(X + Y)$  sind unabhängig.

Hinweis: Sie können die zweite Aussage relative direkt aus der ersten Aussage folgern.

H3. Seien  $X_1, X_2, \dots$  u.i.v. reelle Zufallsvariablen und  $\mathbb{P}(X_1 = i) = \frac{1}{10}$  für  $i = 0, \dots, 9$ . Bestimmen Sie die Verteilung von  $Y = \sum_{i \geq 1} \frac{X_i}{10^i}$

**Abgabe:** Am Dienstag, den 26.05.2009, 12.10 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.