Mathematisches Institut
der Universität München
Vitali Wachtel

Sommersemester 2009
Blatt 5
22.05.2009

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsbeispiele:

T1. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller monoton wachsender Zufallsvariablen, welche in Wahrscheinlichkeit gegen X konvergieren.

Zeigen Sie, dass X_n fast sicher gegen X konvergiert.

T2. Zeigen Sie:

(a) $X_n \to X$ f.s. $\iff$ $Y_n := \sup_{k\geq n} |X_k - X| \to 0$ f.s. $\iff$ $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$

(b) $X_n \to X$ f.s. $\iff$ $\mathbb{P}(|X_k - X| > \epsilon$ für unendlich viele $k) = 0$ für alle $\epsilon > 0$.

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(|X_k - X|^{\beta}) < \infty$ für ein $\beta > 0 \Rightarrow X_n \to X$ f.s.

T3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $C := \{x \in \mathbb{R} : f$ stetig in $x\}$.

Zeigen Sie, dass C eine Borelmenge ist.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst $C = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{G\in U_n} G$, wobei U_n, $n \in \mathbb{N}$, die Menge der offenen Mengen $G \subset \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 1/n$ für alle $x_1, x_2 \in G$ ist.

→ Seite 2

Hausaufgaben:

H1. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, welche exponential-(1)-verteilt sind. Zeigen Sie, dass $n^\alpha min_{k\leq n} X_k \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ für alle $\alpha < 1$.

H2. Seien $X, X_1, \ldots$ Zufallsvariablen. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Aus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen X in Wahrscheinlichkeit folgt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen X in L^p.

(b) Aus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen X in L^p folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n^q) \to \mathbb{E}(X^q) \quad \forall 0 \leq q \leq p\,.$$

(c) Seien $|X_i| \leq |X|$ f.s., $i \in \mathbb{N}$, und $X \in L^1$. Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig integrierbar ist.

H3. Seien $Y_t, t > 0$, Zufallsvariablen mit der Eigenschaft $Y_s \geq Y_t \geq 0$ für aller $s \leq t$. Es gelte $\mathbb{E}(Y_t) = O(e^{-\beta t})$ für $t \to \infty$.

Zeigen Sie, dass $Y_t = o(e^{-\alpha t})$ f.s. für alle $0 \leq \alpha < \beta$.

Bemerkungen: Zeigen Sie die Aussage zuerst für eine geeignete (dies spielt auf die Zwischenwerte an) Folge $t_n \to \infty$. Versuchen Sie danach die Zwischenwerte zu betrachten.

$$\mathbb{E}(Y_t) = O(e^{-\beta t}) :\iff \exists C > 0 \ \liminf_{t\to\infty} |\mathbb{E}(Y_t)| \leq Ce^{-\beta t}$$
$$Y_t = o(e^{-\alpha t}) :\iff \lim_{t\to\infty} Y_t/e^{-\alpha t} = 0$$

Abgabe: Am Dienstag, den 02.06.2009, 12.10 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.