Mathematisches Institut
der Universität München
Vitali Wachtel

Sommersemester 2009
Blatt 6
02.05.2009

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsbeispiele:

T1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone, unbeschränkte Folge positiver reeller Zahlen und $x_n \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{1\leq i\leq N} x_i/a_i$ konvergiert.

Zeigen Sie: $1/a_N \sum_{1\leq i\leq N} x_i \to 0$.

Bemerkung: Diese Aussage wird in der Vorlesung benötigt.

T2. Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvarialben, die auf $[1,2]$ gleichverteilt sind.

Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\prod_{1\leq i\leq n} X_i \Big)^{1/n} = c \text{ fast sicher}$$

und bestimmen Sie c.

T3. Es seien $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ und X Zufallsvariablen und $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{w} X$

(b) $X_n \xrightarrow{w} c \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$

(c) $X_n \xrightarrow{w} c$ und $Y_n \xrightarrow{w} Y \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{w} c + Y$

→ Seite 2

Hausaufgaben:

H1. Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zufallsvariablen und sei $S_n := \sum_{1\leq i\leq n} X_i$. Sind folgende Ereignisse terminal?

(i) $\{\sup_{k\in\mathbb{N}} S_k \leq x\}$ mit $x \in \mathbb{R}$

(ii) $\{\sup_{k\in\mathbb{N}} S_k = \infty\}$

(iii) $\{\liminf_{n\to\infty} X_n \leq x\}$ mit $x \in \mathbb{R}$

H2. Sei $n \in \mathbb{N}$ und X_n eine Poisson-(n)-verteilte Zufallsvariable. Gegen welchen Grenzwert konvergiert die Folge $(X_n/n)_{n\geq 1}$ in Wahrscheinlichkeit?

H3. Es seien μ_n, μ Wahrscheinlichkeitsmaße mit Verteilungsfunktion F_n, F. Die Funktion F sei stetig und $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$. Zeigen Sie:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \to 0\,.$$

Abgabe: Am Dienstag, den 09.06.2009, 12.10 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.