MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
VITALI WACHTEL

Sommersemester 2009
Blatt 8
16.06.2009

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsbeispiele:

T1. Finden Sie den Limes von $e^{-n}\sum_{0\le k\le n}\frac{n^k}{k!}$.

T2. Seien $(X_n)_{n\ge1}$ unabhängige Zufallsvariablen mit

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1/2(1-1/n^2) \\ -1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1/2(1-1/n^2) \\ n & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1/(2n^2) \\ -n & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1/(2n^2) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $(a_N^{-1/2}X_k)_{1\le k\le N, N\ge1}$ ein ZNUDS

$$\begin{aligned} \text{Unabhängig} :\Longleftrightarrow & \ (a_N^{-1/2}X_k)_{1\le k\le N} \text{ sind unabhängig} \\ \text{Zentriert} :\Longleftrightarrow & \ a_N^{-1/2}X_k \in Ł^1 \text{ und } \mathbb{E}(a_N^{-1/2}X_k) = 0 \quad \forall k, N \\ \text{Normiert} :\Longleftrightarrow & \ a_N^{-1/2}X_k \in Ł^2 \text{ und } \sum_{1\le k\le N} Var(a_N^{-1/2}X_k) = 1 \quad \forall N \end{aligned}$$

ist, wobei

$$a_N := \sum_{1\le k\le N}(2-1/k^2)$$

sei. Aber $a_N^{-1/2}\sum_{1\le k\le N}X_k \xrightarrow{w} v_{0,1/2}$ gilt.

T3. Seien $(X_n)_{n\ge1}$ Bernoulli-Zufallsvariablen zur Erfolgswahrscheinlichkeit $p\in]0,1[$ und für jedes $n\ge1$ sei

$$N_n := \min\{k\ge0 : X_{n+k}=0\}$$

die Länge der Erfolgsserie nach dem n-ten Experiment.

Zeigen Sie, dass

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{N_n}{\log_{1/p}(n)} = 1 f.s..$$

→ Seite 2

Hausaufgaben:

H1. Sei X eine integrierbare Zufallsvariable mit Werten in dem Maßraum $(\mathbb{Z}, \mathcal{F})$ und wir bezeichnen das Bildmaß als μ. Sei φ_X die charakteristische Funktion.

Zeigen Sie, dass für jedes $y \in \mathbb{Z}$

$$\mu(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi[} \exp(-ity)\varphi_X(t)dt\,.$$

H2. Seien $(X_n)_{n\geq 1}$ unabhängige $\{0,1\}$-wertige ZV.en mit $\mu(X_n = 1) = p_n \in]0,1[$.

Zeigen Sie, dass das zugehörige zentrierte normierte Dreiecksschema erfüllt genau dann die Lindeberg-Bedingung, wenn $\sum_{n\geq 1} p_n(1-p_n) = \infty$.

H3. Seien $(X_n)_{n\geq 1}$ unabhängige exponential-(α)-verteilte, $\alpha > 0$, Zufallsvariablen.

Zeigen Sie, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log(n)} = \frac{1}{\alpha} f.s.$$

Abgabe: Am Dienstag, den 23.06.2009, 12.10 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.