Mathematisches Institut
der Universität München
Vitali Wachtel

Sommersemester 2009
Blatt 9
23.06.2009

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsbeispiele:

T1. Sei $(X_{i,n})_{i\geq 1, n\geq 1}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_{i,n}=1)=\lambda/n=p_n$ und $\mathbb{P}(X_{i,n}=0)=1-p_n$. Sei $S_n=\sum_{1\leq j\leq n} X_{j,n}$. Zeigen Sie, dass

$$S_n \stackrel{w}{\to} \text{Poisson}(\lambda)$$

gilt (mit der charakteristischen Funktion).

T2. Es sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängiger gleichmäßig beschränkter Zufallsvariablen, d.h. $\mathbb{P}(|X_k|\leq A)=1$ für ein $A>0$ und alle $k\geq 1$. Es gelte $Var(S_n)\to\infty$.

Zeigen Sie, dass

$$\frac{S_n-\mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \stackrel{w}{\to} N(0,1)\,.$$

T3. Seien $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v. Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_i)=0$ und $\mathbb{E}(X_i^2)=1$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \stackrel{\mathbb{P}}{\to} N(0,1)$$

gelten soll.

→ Seite 2

Hausaufgaben:

H1. Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_n) = 0$, $\mathbb{E}(X_n^2) = 1$ und $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}(|X_n|^{2+\alpha}) < \infty$ für ein $\alpha > 0$.

Zeigen Sie, dass
$$S_n/\sqrt{n} \xrightarrow{w} N(0,1)$$
gilt.

H2. Seien X und Y u.i.v. Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X) = 0$ und $Var(X) < \infty$. Zeigen Sie, dass aus
$$\mathbb{P}(X \in .) = \mathbb{P}(\frac{X+Y}{\sqrt{2}} \in .)$$
die Normalverteilung von X folgt.

H3. Seien $(X_i)_{i\geq 1}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_i = 2^i) = 1/2 = \mathbb{P}(X_i = -2^i)$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass
$$\frac{Sn}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow{w} N(0,1)$$
gilt.

Abgabe: Am Dienstag, den 30.06.2009, 12.10 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.