Korrektur Blatt 1 W-Theorie

Max Klinger

July 7, 2010

Messbarkeit

Warum sollten Abbildungen messbar sein?

- Abb $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\Omega^{'}, \mathcal{A}^{'})$
- messbar $\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{A}^{'} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = \{X \in B\} \in \mathcal{A}$.
- Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ wegen X messbar ist $\mathbb{P}(\{X \in B\})$ wohldef.

Übung H 1. *Wir suchen $X(\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ nicht messbar, aber X^2 messbar.*

Lösung. $\Omega = \{-1, 1\}, \mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}, X = id, dh.h. X(\omega) = \omega$

- $\{X \leq 0\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in]\omega, 0]\} = \{-1\} \notin \mathcal{A}$
- $X^2 = 1 \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \{X^2 \in \mathcal{B}\} = \begin{cases} \Omega, & 1 \in \mathcal{B} \\ \emptyset, & 1 \notin B \end{cases}$, also $\{X^2 \in B\} \in \mathcal{A}$

$\square$

Übung H 2. $\Omega \neq \emptyset$

a) $\mathcal{A}$ ist $\sigma-Algebra \Leftrightarrow$

1) $\Omega \in \mathcal{A}$

2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

3) $A_n \in \mathcal{A} \, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n=1} A_n \in \mathcal{A}$

b) Sei $\mathcal{B}$ ein Mengensystem, mit folgenden Eigenschaften:

1) $\emptyset \in \mathcal{B}$

2) $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}$

3) $A_n \in \mathcal{B} \, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n=1} A_n \in \mathcal{B}$

Zeigen oder widerlegen sie, dass es sich bei $\mathcal{B}$ um eine $\sigma-$Algebra handelt.

Beweis: a) i) $\Leftrightarrow$ 1)

ii) i)$\Leftrightarrow$ 2)

"$\Rightarrow$" Sei: $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$

"$\Leftarrow$" Sei: $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

$A \setminus B = A \setminus (B \cap A)$

$\Rightarrow B \setminus A = B \cap A^c \in \mathcal{A}$

iii) $\Leftrightarrow$ 3)

"$\Rightarrow$" Sei $A_n \in \mathcal{A},\ n \geq 1:$ $\left(\bigcap_{n=1} A^c\right)^c = \bigcup_{n=1} A_n \in \mathcal{A}$

"$\Leftarrow$" Sei $A_n \in \mathcal{A},\ n \geq 1:$ $\bigcup_{n=1} A_n = \Omega \setminus \left(\bigcup_{n=1} \Omega \setminus A_n\right) \in \mathcal{A}$

b) $\{\emptyset\}$ ist keine σ-Algebra, aber erfüllt die Bedingungen.

$\square$

Übung H 3. $(\Omega, \mathcal{A})$ *(Messraum),* $X, Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ *Abbildungen.*

a) *z.z.: X borelmessbar* $\Leftrightarrow \forall q \in \mathbb{Q} \quad \{X < q\} \in \mathcal{A}$

b) nach a) noch z.z. $\forall q \in \mathbb{Q} \quad \{X + Y < q\} \in \mathcal{A}$

Beweis: a) "$\Rightarrow$" $\forall q \in \mathbb{Q} \quad]-\infty, q[\in \mathcal{B} \Rightarrow \{X \in]\infty, q[\} = \{X < q\} \in \mathcal{A}$

"$\Leftarrow$"

- Satz 1.9 $\Rightarrow$ es genügt Messbarkeit auf einem Erzeuger zu zeigen
- Satz 1.9 $\Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R})$ wird durch offene Intervalle erzeugt
- $a, b \in \mathbb{R}$ o.B.d. $A. a < b. a_n \searrow a, b_n \nearrow b$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{Q}\ \forall n \in \mathbb{N}$
  $]a, b[\supset [a_n, b_n[\ \forall n \in \mathbb{N}\ \{a < X < b\} \supset \{a_n \leq X < b_n\}\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n \geq 1} (\{X < a_n)^c \cap \{X < b\} = \{a < X < b\} \in \mathcal{A} \\
&= \bigcup_{n \geq 1} (\{a_n \leq X\} \cap \{X < b_n\} \\
&= \bigcup_{n \geq 1} \{a_n \leq X < b_n\}
\end{aligned}$$

b) Sei $q \in \mathbb{Q}$: $\{X + Y < q\} = \{X < q - Y\} = \bigcup_{z \leq \mathbb{Q}} (\{X < z\} \cap \{z < q - Y\}) \in \mathcal{A}$

hierbei : $\{Y < X\} = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) < X(\omega)\}$

$$\begin{aligned}
\bigcup_{z \in \mathbb{Q}} (\{Y < z\} \cap \{z < X\}) &= \bigcup_{z \in \mathbb{Q}} (\{\omega \in \Omega : Y(\omega) < z\} \cap \{\omega \cap \Omega : z < X(\omega)\}) \\
&= \{\omega \in \Omega : Y(\omega < X(\omega))\} = \{Y < X\}
\end{aligned}$$

$\square$