# Wahrscheinlichkeitstheorie Übungsblatt 11

**Aufgabe H 1.** *Sei (X, Y) ein Zufallsvektor mit Dichte* $f(x,y) = xe^{-x(y+1)}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^2_+}(x,y)$. *Berechne die bedingten Erwartungswerte* $\mathbb{E}[X|Y]$ *und* $\mathbb{E}[Y|X]$.

*Beweis.* $P(X=k) = (1-p)^{k-1}p, \forall k \geq 1$

$$\begin{aligned} P(X+Y=n) &= \sum_{i=1}^{n-1} P(X_2=i, Y=n-i) = \sum_{i=1}^{n-1}(1-p)^{i-1}p(1-p)^{n-i-1}p \\ &= \frac{p^2}{(1-p)^2}\sum_{i=1}^{n-1}(1-p)^n = \frac{p^2}{(1-p)^2}(n-1)(1-p)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1 : P(X=k|Y+X=n) &= \frac{X=k, Y=n-k}{(n-1)(1-p)^{n-2}p^2} = \frac{p(1-p)^{k-1}p(1-p)^{n-k-1}]}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}} \\ &= \frac{1}{(n-1)}; \ \forall k \in \{1, \ldots, n-1\} \end{aligned}$$

- $\mathbb{E}\left[X^2|X+Y=n\right] = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}k^2 = \frac{1}{(n-1)}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{n(2n-1)}{6}$
- $\mathbb{E}\left[X^2|X+Y\right] = \frac{(X+Y)(2(X+Y)-1)}{6}$

□

**Aufgabe H 2.** *Sei* $(X_n)$ *ein Submartingal bzgl. der Filtration* $(\mathcal{F}_\backslash)$ *und* $T_1, T_2$ *Stoppzeiten mit* $P(T_1 \leq T_2 \leq K) = 1$ *für eine Konstante K.* $\mathbb{E}[X_{T_1}] \leq \mathbb{E}[X_{T_2}]$

*Beweis.* $\mathbb{E}[X_{T_1}] = \sum_{n=0}^k \mathbb{E}[X_{T_1}\mathbb{1}_{T_1=n}] = \sum_{n=0}^k \mathbb{E}[X_n\mathbb{1}_{T_1=n}]$
$\underline{0 \leq n \leq k}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n\mathbb{1}_{T_1=n}] &= \mathbb{E}[X_n\mathbb{1}_{T_1=n}\mathbb{1}_{T_2\geq n}] = \mathbb{E}[X_n\mathbb{1}_{T_1=n=T_2}] + \mathbb{E}[X_n\mathbb{1}_{T_1=n}\mathbb{1}_{T_2>n}] \\ &= \left[\{T_2>n\}^c = \{T_2 \leq n\} = \bigcup_{i=0}^n \underbrace{\{T_2=i\}}_{\in\mathcal{F}_i} \in \mathcal{F}_n\right] \\ &\leq {}^1\mathbb{E}\left[X_n\mathbb{1}_{\{T_1=n=T_2\}}\right] + \mathbb{E}\left[X_{n+1}\mathbb{1}_{\{T_1=n=T_2\}}\right] \end{aligned}$$

<u>iterativ:</u> $\mathbb{E}\left[X_n\mathbb{1}_{\{T_1=n\}}\right] \leq \mathbb{E}[X_{T_2}\mathbb{1}_{T_1=n}] \Rightarrow \mathbb{E}[X_{T_1}] \leq \mathbb{E}[X_{T_2}]$ □

*Beweisidee:*

- aufspalten in verschiedene Fälle (diskrete Stoppzeichen)
- $\{T_2 > n\} \in \mathcal{F}_n$
- Submartingaleigenschaft verwenden

□

**Aufgabe H 3.** *Sei* $\mathcal{F}_n$ *eine Filtration.* $\forall$ *Submartingal* $(X_n)$ $\exists$ *ein Martingal* $(M_n)$ *und eine previsible monoton wachsende Folge* $(A_n)$ *mit* $X_n = M_n + A_n$ $\forall n \geq 1$. *Ist diese Zerlegung eindeutig.*

*Beweis.*

$$\begin{aligned} M_n &= X_n - \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] + X_{n-1} - \mathbb{E}[X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-2}] + \ldots \\ &= \sum_{i=1}^n [X_i - \mathbb{E}[X_1|\mathcal{F}_{i-1}]] \text{ (mit } X_0 = 0, \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{E}\left[M_n|\mathcal{F}_{n-1}\right] = M_{n-1}$
$\quad A_n = \mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{F}_{n-1}\right] - X_{n-1} + \ldots = \sum_{i=1}^{n}[\mathbb{E}\left[X_1|\mathcal{F}_{i-1}\right] - X_{i-1}]$
previsible ✓
monoton wachsend: $A_n - A_{n-1} = \mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{F}_{n-1}\right] - X_{n-1} \geq$ [2]$0$ □

---

[2] $X_n$
Submartingal