Übungsblatt 2 W-Theorie

Max Klinger

July 7, 2010

Aufgabe 1. *Sei* $(\Omega), \mathcal{A})$*,* $A_i \in \mathcal{A}$*,* $i \geq 1$ *und* $f_n : \Omega \to [-\infty, \infty]$*,* $n \geq 1$*,* $\mathcal{A} - \overline{\mathcal{B}}$*-messbare Funktionen. Z.Z.:*

a) Die Menge $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n := \left\{\omega \in \Omega : \limsup\limits_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = 1\right\}$ *entspricht der Menge* $\left\{\omega \in \Omega : \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = \infty\right\}$.

b) $\{f_n$ *konvergiert gegen einen Wert in* $[-\infty, \infty]\} := \left\{\limsup\limits_{n\to f_n} = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n\right\} \in \mathcal{A}$.

Proof. a)“ $\subset$ “ Sei a $\leq \limsup 1_n$

- Def. von $\limsup \Rightarrow 1$ ist H.P. von $(\mathbb{1}_{A_n}(\omega))_{n\geq 1}$, d.h. $\exists\, \mathbb{1}_{A_{n_k}}(\omega) \xrightarrow{k\to\infty} 1$
- wegen $\mathbb{1}_{A_{n_k}}(\omega) \in \{0,1\}\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \mathbb{1}_{A_{n_k}}(\omega) = 1\ \forall k \geq N$
- $\sum\limits_{n\geq 1} \mathbb{1}_{A_{n_k}}(\omega) = \sum\limits_{n\geq k} \mathbb{1}_{A_{n_k}}(\omega) \leq \sum\limits_{k\geq N} 1 = \infty$

“ $\supset$ “ Sei $\omega : \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{A_{n_k}}(\omega) = \infty$

- Wegen $\mathbb{1}_{A_{n_k}}(\omega) \in \{0,1\} \Rightarrow \exists \left(\mathbb{1}_{A_{n_k}}(\omega)\right)_{k\geq 1}$ mit $\mathbb{1}_{A_{n_k}}(\omega) = 1$, da ansonsten $\sum\limits_{n\geq 1} \mathbb{1}_{A_{n_k}}(\omega) < \infty$
- Also ist 1 H.P. $\Rightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_{n_k}}(\omega) \geq 1$
- Wegen $\mathbb{1}_{A_{n_k}}(\omega) \leq 1\ \forall n \in \mathbb{N}$ ist $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_{n_k}}(\omega) \leq 1$
  $]-\infty, 1]$ ist abgeschlossen $\Rightarrow$ alle H.P. von Folgen mit Werten in $]-\infty, 1]$ liegen in $]-\infty, 1]$

b) $\{f_n$ konvergiert in $[-\infty, \infty]\}^c = \{\liminf f_n = \limsup f_n\}^c =$
$= \{\liminf f_n < \limsup f_n\} = \bigcup\limits_{a,b\notin\mathbb{Q}} \{\liminf f_n < a < b < \limsup f_n\} =$

$$\bigcup_{a<b\notin\mathbb{Q}} \left(\underbrace{\{\liminf f_n < a\}}_{\in\mathcal{A}} \cap \underbrace{\{b < \limsup f_n\}}_{\in\mathcal{A}} \right) \in \mathcal{A}$$

□

Aufgabe 2. *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *ein W'raum und* $A, B, A_n \in \mathcal{A},\ n \geq 1$. *Zeigen sie folgenden elementaren Eigenschaften von* P*:*

a) $A \subset B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \leq \mathcal{P}(B)$

b) $\mathcal{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n\geq 1} \mathcal{P}(A_n)$

c) $\mathcal{P}(A_n) = 1\ \forall n \geq 1 \Rightarrow \mathcal{P}\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = 1$

d) $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \Rightarrow \lim_{n\to 0} \mathcal{P}(A_n) = \mathcal{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)$

Proof. a) $\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}\left(A \,\dot\cup\, (B \cap A^c) \,\dot\cup\, \emptyset \,\dot\cup \ldots\right) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B \cap A^c) + 0 + \ldots \geq \mathcal{P}(A)$

b)
- $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, \ldots, B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)$.
  B_n disjunkte Folge und $\bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n\geq 1} B_n$
- $\mathcal{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \mathcal{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right) = \sum \underbrace{\mathcal{P}(B_n)}_{\mathcal{P}(A_n)} \leq \sum_{n\geq 1} \mathcal{P}(A_n)$

c) $\mathcal{P}(A_n^c) = 0$

- $\mathcal{P}\left(\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right)^c\right) = \mathcal{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n^c\right) \leq \sum_{n\geq 1} \mathcal{P}(A_n^c) = 0$
- $1 = 1 - 0 = 1 - \mathcal{P}\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n^c\right) = \mathcal{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)$

d) Vorl. $\Rightarrow B_1 \supset B_2 \supset B_3 \ldots \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}(B_n) = \mathcal{P}\left(\bigcap_{n=1} B_n\right)$

- $B_n = A_n^c$ dann $B1 \supset B_2 \supset \ldots \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}(B_n) = \mathcal{P}\left(\bigcap_{n\geq 1} B_n\right)$
- $1 - \ln P(A_n) = \lim_{n\to\infty} (1 - \mathcal{P}(A_n)) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}(A_n^c) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}(B_n) = \mathcal{P}\left(\bigcap_{n\geq 1} B_n\right) = 1 - \mathcal{P}\left(\left(\bigcap_{n\geq 1} B_n\right)^c\right) = 1 - \mathcal{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \Rightarrow$ Beh.

□

Aufgabe 3.

Ein Mengensystem $\mathcal{M} \subset 2^\Omega$ heißt monotone Klasse, falls es folgende Eigenschaften hat:

a) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}, A_1 \subset A_2 \subset \ldots \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{M}$

b) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}, A_1 \supset A_2 \supset \ldots \Rightarrow \bigcap_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{M}$

Sei nun $\mathcal{M}$ monotone Klasse und $\mathcal{A}$ Algebra mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. Zeigen sie $\sigma(A) \subset \mathcal{M}$

Proof.

- $\mathcal{M}_i, i \in I$, monotone Klasse $\Rightarrow \bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{M}$ monotone Klasse, da Eigenschaften sich übertragen $\Rightarrow$ o. E. $\mathcal{M}$ kleinste monotone Klasse mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$
- abgeschlossen unter Komplementbildung, da $\mathcal{M}_0 = \{A \in \mathcal{M} : A^c \in \mathcal{M}\} \subset \mathcal{M}$ monotone Klasse mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$
  $\mathcal{M}$ kleinste M.Kl $\Rightarrow \mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$
- Eigenschaften monotoner Klassen bleiben unter Schnitt mit festem $C \in \mathcal{M}$ erhalten, da $\mathcal{M}_C := \{A \in \mathcal{M} : A \cap C \in \mathcal{M}\}$ monotone Klasse, da $A_i \in \mathcal{M}_C$, $A_i \nearrow A = \bigcup\limits_{i\geq 1} A_i \Rightarrow A_i \in \mathcal{M}$, $A_i \nearrow A$, $A_i \cap C \in \mathcal{M}$ und $A_i \cap C \nearrow A_n \cap C \Rightarrow A \in \mathcal{M}$
- $A_i \in \mathcal{M}_0$ und $A_i \searrow \tilde{A} = \bigcap\limits_{i\in I} A_i \Rightarrow A_i \in \mathcal{M}$ und $A_i \searrow \tilde{A}$, $A_i \cap C \in \mathcal{M}$ und $A_1 \cap C \searrow A \cap C \Rightarrow \tilde{A} \in \mathcal{M}_0$
- Abgeschlossen unter endlichen Schnitten:
  $\forall C \subset \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{M}_0 = \mathcal{M} \Rightarrow D \cap C \in \mathcal{M}\ \forall D \in \mathcal{M},\ C \in \mathcal{A}$
  $\forall D \in \mathcal{M}, \mathcal{A} \in \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$
- Abgeschlossenheit unter abzählbar vielen Vereinigungen:
  $\forall A_1, A_2, \ldots \subset \mathcal{M} : A_1 \cup \ldots \cup A_n \subset A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1} = (A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c)^c$
  $\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n = \bigcup\limits_{n\geq 1} (A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \bigcup\limits_{n\geq 1} (A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c)^c \overset{\text{mon. Kl.}}{\in} \mathcal{M}$
- $\mathcal{M}$ ist σ-Algebra $\Rightarrow \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$ ($\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{A})$ da $\sigma(\mathcal{A})$ eine monotone Klasse mit $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{A})$ ist).

$\square$