Übungsblatt 3 W-Theorie

Max Klinger

July 7, 2010

Aufgabe H 1. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Maßraum, zu zeigen: Für eine ZV X mit Werten in $[0, \infty)$ gilt:*

$$\mathbb{E}\left[1\right](X^p) = p \int_0^\infty t^{p-1} \mathbb{P}(X > t) dt$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X^p\right] &= \int S^p \mathbb{1}_{[0,\infty)}(s) \mathcal{P} \circ X^{-1}(ds) = \int \left(\int_0^\infty p t^{p-1} \mathbb{1}_{[0,s[}(t) dt \right) \mathcal{P} \circ X^{-1}(ds) \\
&\overset{\text{Fubini_Tonelli}}{=} \int_0^\infty \left(\int p t^{p-1} \mathbb{1}_{]t,\infty]}(s) \mathcal{P} \circ X^{-1}(ds) \right) dt \\
&= \int_0^\infty p t^{p-1} \mathcal{P}(X > t) dt = p \int_0^\infty t^{p-1} \mathcal{P}(X > t) dt
\end{aligned}$$

□

Aufgabe H 2. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Maßraum und X eine reelle Zufallsvariable.*

a) Sei X poissonverteilt, d.h. $\mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$ für $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ Berechne den Erwartungswert von X und $\mathbb{E}\left[1\right](X^2)$

b) Sei X exponentialverteilt, d.h. X besitzt die Lebesgue-Dichte $\lambda e^{\lambda t} \mathbb{1}_{t \leq 0}$. Berechnen sie die Varianz von X.

Beweis. a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X\right] = \sum_{n \geq 0} n \mathcal{P}(X = n) = \sum_{n \geq 1} n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} &= e^{-\lambda} \lambda \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \\
&= e^{-\lambda} \lambda \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X^2\right] &= \lambda + \underbrace{\mathbb{E}\left[1\right](X^2 - X)}_{\mathbb{E}[X(X-1)]} = ? \\
&= \sum_{n \geq 0} n(n-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{n \geq 2} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} = e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} = n!
\end{aligned}$$

b)

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t} dt \overset{P.I.}{=} -e^{-\lambda t} t|_0^\infty - \int 1(-e^{-\lambda t}) dt = 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}[X] &= \mathbb{E}[(X - E[X])^2] = \int_0^\infty (t - \frac{1}{\lambda})^2 \lambda e^{-\lambda t} dt \\
&= \int_0^\infty t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt - \frac{2}{\lambda} \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t} dt + \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda} dt \\
&\overset{P.I.}{=} -t^2 e^{-\lambda t}|_0^\infty + \int 2te^{-\lambda t} dt - \frac{2}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \\
&= 0 + \frac{2}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \\
&= \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

□

Aufgabe H 3. *Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und μ, ν zwei endliche Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Zu zeigen:*

$$\nu \ll \mu \overset{!}{\Leftrightarrow} \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) < \delta \Rightarrow \nu(A) < \epsilon$$

Proof. "⇐" $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) < \epsilon \; \forall \epsilon > 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$

"⇒" Widerspruchsannahme: $\exists \epsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists A \in \mathcal{A} : \mu(A) < \delta$ und $\nu(A) \geq \epsilon$

$\Rightarrow A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A_n) < \frac{1}{2^n}$ und $\nu(A_n) \geq \epsilon \, \forall n \geq 1$

$A := \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m \geq n} A_m$

$\Rightarrow \mu(A) \geq \mu(\bigcup_{m\geq n} A_m) \leq \sum_{m \geq n} \frac{1}{2^m} = \frac{2}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow \mu(A) = 0$, aber $\nu(A) = \int \limsup_{n\to\infty} 1_{A_n} d\nu$

$\overset{\text{LM v. Fatou}}{\geq} \int 1_{A_n} d_\nu = \nu(A_n) \geq \epsilon$ Widerspruch da $\nu \ll \mu$

□