Korrektur Übungsblatt 4 W-Theorie

Max Klinger

July 7, 2010

Aufgabe H 1. *Seien (X,Y) reelle ZVen mit Dichten* $e^{-x-y}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^2_+}$
Z.Z.: $X+Y$ *unabhängig von* $X \setminus Y$

Proof.

- $$\begin{aligned} P\left([\right) X \setminus Y \le e] &= P\left([\right) X \le Y_e] \\ &= \int_0^\infty dy e^{-y} \int_0^{ey} dx e^{-x} \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty dy e^{-y}(1-e^{-ey}) \\ &= 1 - \int_0^\infty dy e^{-y(1+e)} = 1 - \frac{1}{1+e} = \frac{e}{1+e};\ e > 0 \end{aligned}$$

  ausserdem

  $$P\left([\right) X + Y \le c] = P\left([\right) X \le c - Y] = \int_0^c dy e^{-y} \underbrace{\int_0^{c-y} dx e^{-x}}_{1-e^{y-c}}$$

  $$= \int_0^c dy e^{-y}(1-e^{y-e}) = \int_0^c dy e^{-y} - \int_0^c dy e^c = 1 - e^{-\epsilon} - ce^{-c}$$

- $P\left([\right) X + Y \le c, X/Y \le \epsilon] = P\left([\right) X \le c - Y, X \le \epsilon Y]$

- $P\left(X \le \underbrace{\min(\epsilon Y, \epsilon Y)}_{\ge 0}\right) =$ [1] $= \int_0^c dy e^{-y} \int_0^{\min(\epsilon Y, \epsilon Y)} dx e^{-x}\ \epsilon - Y \le \epsilon Y \Rightarrow \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \le$

  $Y \ \le\ \int_{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}}^{\epsilon} dy e^{-y} \underbrace{\int_0^{\epsilon - Y} dx e^{-x}}_{1-e^{y-\epsilon}} + \int_0^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}} dy e^{-y} \underbrace{\int_0^{\epsilon - Y} dy e^{-x}}_{1-e^{-\epsilon y}}\ \int_{\frac{c}{1+e}}^{c} dy(e^{-y} - e^{-c}) +$

  $\int_0^{\frac{c}{1+e}} dy(e^{-y} - e^{-y(1+\epsilon)} = e^{\frac{-c}{1+e}} - e^{-c} - e^{-c}(c - \frac{c}{1+e} + 1 - e^{\frac{-c}{1+e}} - \left[\frac{1}{1+e} - \frac{1}{1+e} e^{-\frac{c}{1+e}(1+e)}\right]$
  $= 1 - e^{-c} - ce^{-c} - \frac{1}{1+e} + \frac{1}{1+e} e^{-c} + \frac{c}{1+e} e^{-c} = (1 - \frac{1}{1+e})(1 - e^{-c} - ce^{-c})$

[1] Prüfen das kann nicht stimmen.

- $\frac{X}{X+Y} = \left(1+\frac{Y}{X}\right)^{-1} = \left(1+\left(\frac{X}{Y}\right)^{-1}\right)^{-1}$ z.Z.: $X+Y$ und $\frac{X}{X+Y}$ sind unabhängig $\overset{a}{\Rightarrow}$ $X+Y$ und X/Y sind unabhängig. $\Rightarrow$[2] $X+Y$ und $g\left(\frac{X}{Y}\right)$ sind unabhängig.

$$\mathbb{E}\left[f(X+Y)g(\frac{X}{Y}\right] = \mathbb{E}\left[f(X+Y)\right]\mathbb{E}\left[g\left(\frac{X}{Y}\right)\right]$$

$f(X+Y) = \mathbb{1}_{X+Y\leq\epsilon}$ und $g(\frac{X}{Y}) = \mathbb{1}_{\{\frac{X}{X+Y}<\epsilon\}}$

$\square$

Aufgabe H 2. $X_1, X_2, \ldots,$ *idd ZVen* $Y = \sum_{i=1} \frac{X_i}{10^i}$ $P(X_i = i) = \frac{1}{10}$; $i \in \{0,\ldots,9\}$ $P(Y \leq d) = ?$ $d = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i}$ *mit* $0 \leq a_i \leq 9$ *Menge der endlichen so definierten Folgen liegt in [0,1]*

[2] Satz 3.13 Spezialfall