Wahrscheinlichkeitstheorie Übungsblatt 6

Aufgabe H 1. *Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle ZVen, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Sind*

- $\{\sup_{k\in\mathbb{N}} S_k \leq x\}$ *mit* $x \in \mathbb{R}$
- $\{\sup_{k\in\mathbb{N}} S_k = \infty\}$
- $\{\liminf_{n\to\infty} X_n \leq x\}$ *mit* $x \in \mathbb{R}$

terminal?

Beweis. 1. $\left\{\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \int_k \subseteq x\right\} \in \mathcal{T}$ mit $x \in \mathbb{R}$; nein $(X_i)_{i\geq 1}$ reelle unabh. ZVen.
$X_1 \in \{-1, 1\}$ und $X_i \equiv 0,\ i \geq 2$; $\sup_k \int_K = X_1$
$\Rightarrow \left\{\sup_k \int_k \leq x\right\} \notin \sigma(X_2, X_3, X_4, \dots)$
$\Rightarrow \{\sup_k \int_k \leq x\}$ ist nicht $\in \mathcal{T}$

2. $\{\sup_k \int_K = \infty\}$ terminal ? Ja, da X <u>reelle</u> ZV

   - $\{\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_K = \infty\} = \{\sup_{k\geq n} \int_K = \infty\}$; $\forall n \in \mathbb{N}$
   - $\{\sup\limits_{k\geq n} \int_K = \sup\limits_n (X_1 + \ldots + X_n + \ldots X_k) = \infty\} =$
     $\{\sup\limits_k \geq n \sum\limits_{n\leq i\leq k} X_i = \infty\} \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$; $\forall n \in \mathbb{N}$
     $\Rightarrow \{\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_k = \infty\}$ ist terminal

3. $\{\liminf_{n\to\infty} X_n \leq x\}$ ist terminal? Ja.
   $\left\{\liminf\limits_{n\to\infty}\right\} = \bigcap\limits_{k\geq 1} \bigcap\limits_{1\leq j<\infty} \bigcup\limits_{j<i<\infty} \left\{X_i \leq x + \frac{1}{k}\right\}$ Nach Vorlesung (Bsp 3.18) gilt

$$\bigcap_{1\leq j<\infty} \bigcup_{j\leq i<\infty} \left\{X_i \leq x + \frac{1}{k}\right\} = \bigcap_{N\leq j<\infty} \bigcup_{j\leq i<\infty} \left\{X_i \leq x + \frac{1}{k}\right\} \ \forall k, N \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \{\liminf X_n \leq x\} = \bigcap_{k\geq 1} \bigcap_{1<j<\infty} \bigcup_{j\leq i<\infty} \left\{X_i \leq x + \frac{1}{2}\right\}$$

$$= \underbrace{\bigcap_{k\geq 1} \bigcap_{1<j<\infty} \bigcup_{j<i<\infty} \left\{X_i \leq x + \frac{1}{k}\right\}}_{\sigma(X_n, X_{n+1}, \dots}; \ \forall N \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \{\liminf X_n \leq 1\} \in \mathcal{T} = \bigcap_{N\geq 1} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$$

□

Aufgabe H 2. *Sei $n \in \mathbb{N}, X_n \sim \mathrm{Poi}_n$ und $\left(\frac{X_n}{n}\right)_{n\geq 1} \xrightarrow{P} c =?$*

Beweis. Sei $Y_1, \dots, Y_n$ unabhängig und $Y_j \sim \mathrm{Poi}_1$; $\forall i \Rightarrow \sum_{i=1}^n Y_i \sim \mathrm{Poi}_n$.
Wir können das Gesetz der großen Zahlen anwenden (wegen Poi_1 und unabhängig)

$$\frac{1}{n} \sum_{1\leq i\leq N}^{N} Y_i \xrightarrow{P} \mathbb{E}[Y_1] = 1; \Rightarrow \frac{X_n}{\omega} \xrightarrow{P} 1$$

□

Aufgabe H 3. *μ_n, μ W'Maße $\mu_n(]-\infty, x]) = F_n(x)$, $\mu(]-\infty, x]) = F(x)$*

- *F stetig*
- $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$

Z.Z.: $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \to 0$

Beweis. • $F_n(x) \to F(x)$ für $x \in \mathbb{R}$
Widerspruchsannahme $\exists \epsilon > 0;\ \exists (n_k)_{k\in\mathbb{N}}\ \exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}\ |F_{n_k}(x_{n_k}) - F(x_{n_k})| \geq \epsilon$

1.Fall: $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sei unbeschränkt
1. Unterfall $x_{n_k} \nearrow \infty$ monoton. $F(n) \xrightarrow{n\to\infty} 1$, d.h. $\exists N \in \mathbb{N}\ 1 - F(N) < \frac{\epsilon}{3}$
wegen $F_{n_k}(N) \to F(N)\ \exists N' \in \mathbb{N}:\ |F_{n_k} - F(N)| < \frac{\epsilon}{3}\ \forall k \geq \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow |F(x) - F_{n_k}(x)| &\leq |1 - F(x)| + |1 - F_{n_k}(x)| \leq \underbrace{1 - F(x)}_{\frac{\epsilon}{3}} + 1 - F_{n_k}(x)\\ &\leq 1 - F(N) + 1 - F_{n_k}(N)\\ &< \frac{\epsilon}{3} + 1 - F(N) + F(N) - F_{n_k}(N) < \epsilon\end{aligned}$$

2. Unterfall $x_{n_k} \searrow -\infty$ monoton analoger Widerspruch

2.Fall: (x_{n_k}) sei beschränkt o. E. $x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} x$
Da F stetig $\exists \delta > 0\ |x - y| \leq \delta \Rightarrow |F(x) - F(y)| \leq \frac{\epsilon}{5}$
Da $F_n \to F$ punktweise $\exists N \in \mathbb{N}:\ |F_{n_k}(x-\delta) - F(x-\delta)| < \frac{\epsilon}{5};\ \forall k \geq N$
$|F_{n_k}(x+\delta) - F(x+\delta| < \frac{\epsilon}{5};\ \forall k \geq N$
$y \in [x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2}] \Rightarrow$

$$\begin{aligned}|F(y) - F_{n_k}(y)| &\leq |F(y) - F(x-\delta| + |F(x-\delta) - F_{n_k}(x-\delta)|\\ &\quad + |F_{n_k}(x-\delta) - F_{n_k}(y)|\\ &< \frac{\epsilon}{5} + \frac{\epsilon}{5} + \underbrace{F_{n_k}(y)}_{F(x-\delta)+\epsilon/5} - \underbrace{F_{n_k}(x-\delta)}_{F(x-\delta)+\epsilon/5}\\ &< \frac{\epsilon}{5} + \frac{\epsilon}{5} + \frac{\epsilon}{5}{}_F(x+\delta) - F(x-\delta) + \frac{\epsilon}{5}\\ &= 4\frac{\epsilon}{5} + F(x+\delta) - F(x-\delta)\\ &< \epsilon\end{aligned}$$

□