Wahrscheinlichkeitstheorie Übungsblatt 7

Aufgabe H 1.

a) *i)* $\mu = p\delta_1 + (1-p)\delta_0$; $\qquad \phi_\mu(t) = pe^{it1} + (1-p)e^{it0} = 1 - p + pe^{it}$

ii) $X_1, \ldots, X_n$ *sei Bernoulli-p-vert. und unabh.* $\rightarrow \sum_{i=1}^n X_i$ *Binomial-(n,p)-vert.*

$$\phi_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \int e^{it\sum_{i=1}^n X_i} dP = \int \prod_{i=1}^n e^{itX_i} dP \overset{unabh.}{=} \prod_{i=1}^n \in e^{itX_i} dP \overset{(i)}{=} (1-p+pe^{it})^n$$

b) *i)* $\cos(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right]$ $\cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$ *aus* $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ *und* $\sin(-x) = -\sin(x)$ *und* $\cos(-x) = \cos(x)$
$\Rightarrow$ *Sei X ZV mit Werten in* $\{-1, 1\}$ *und* $P\left([)\, X = 1\right] = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \cos(t)$

ii) $\sum_{0 \le < \infty} a_k \cos(kt)$ *mit* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$ *und* $a_k = 0\ \forall k \geq 0$

$$\sum_{0 \le k < \infty} a_k \cos(kt) = \sum_{0 \le k < \infty} a_{k/2} \left(\frac{e^{itk} + e^{-itk}}{1}\right) \overset{!}{=} \mathbb{E}\left[e^{itX}\right]$$

$\Rightarrow X$ *sei ZV mit Werten in* $\mathbb{Z}$ *und* $P\left([)\, X = k\right] = P\left([)\, X = -k\right] = \frac{a_k}{2}, k \geq 1$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \sum_{0 \le k < \infty} a_k \left(\frac{e^{itk} + e^{-itk}}{2}\right) = \sum_{0 \le k < \infty} a_k \cos(tkx)$$

Aufgabe H 2. *ϕ_X charakteristische Funktion zur ZV X*

a) $\Re(\phi_X)$ *ist charakteristische Funktion, d.h. finde Y ZV mit* $\phi_X(T) = \Re(\phi_X(t))$

b) $\frac{2}{2-\phi} - 1$ *ist charakteristische Funktion*

Beweis. a) $\Re(\phi_X) = \mathbb{E}\left[\cos(tX)\right] = \frac{\phi(t)+\phi(-t)}{2} = \frac{\phi(t)}{2} + \frac{\phi(-t)}{2}$. Ausserdem is $\phi(-t)$ charakteristische Funktion von (-X) (Satz 5.15.b). Sei θ ZV mit Werten in $\{0, 1\}$ unabhängig von X und $P\left([)\, \theta = -1\right] = \frac{1}{2}$. Sei $Y = (-1)^\theta$ $\phi_Y(t) = \mathbb{E}\left[e^{itY}\right] = \mathbb{E}\left[e^{it(-1)^\theta X}\left(\mathbb{1}_{\{\theta=0\}}\mathbb{1}_{\{\theta=1\}}\right)\right] = \mathbb{E}\left[e^{itX}\mathbb{1}_{\{\theta=0\}}\right] + \mathbb{E}\left[e^{it(-X)}\mathbb{1}_{\{\theta=1\}}\right] = \frac{\phi_X(t)}{2} + \frac{\phi_X(-t)}{2} = \Re(\phi_X(t))$

b) <u>Idee:</u> $\frac{2}{2-p} = \frac{1}{1-\frac{P}{2}} \overset{|p|<1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{p}{2})^k = sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^k p^k$

<u>Beweis:</u>

- Sei N ZV mit $P\left([)\, N = k\right] = (\frac{1}{2})^k, k \geq 1$
- Sei $Y = \sum_{i=1}^N X_i$ mit $N, X_1, \ldots$ unabhängig und $X_i \sim X$ $i \geq 1$
- $\mathbb{E}\left[e^{itY}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^k \mathbb{E}\left[e^{it\sum_{i=1}^k X_i}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^k \prod_{i=1}^k \phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^k \phi(t)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^k \phi(t)^k - 1$
  $=$[1] $\frac{2}{2-\phi} = 1$

□

Aufgabe H 3. $\phi_x(t) = e^{-t^4}$ *geht nicht*

[1] $|\phi(t)| \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$

Beweis. Widerspruchsannahme e^{-t^4} ist charakteristische Funktion. Da $\phi_X''(0)$ endlich ist $\overset{\text{Satz 5.20]}}{\Longrightarrow}$ $\mathbb{E}\left[(|X|^2)\right] < \infty$. Aus $\mathbb{E}\left[|X|^2\right] < \infty \Longrightarrow$ [2]$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \frac{1}{i^2}\phi^{(2)}(0) = 0$. Da $X^2 \geq 0$ und $\mathbb{E}\left[X^2\right] = 0 \Rightarrow X = 0$ fast sicher $\Rightarrow \phi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = 1 \neq e^{-t^4} = \phi_x(t)$ Widerspruch $\square$

[2]Satz 5.18 Spezialfall