Wahrscheinlichkeitstheorie Übungsblatt 8

Aufgabe H 1.
X sei integrierbare ZV, mit Werten in $(\mathbb{Z}, \mathcal{F})$, Das zugehörige Bildmaß sei μ. Bezeichne ϕ_X die charakteristische Funktion. Zu zeigen

$$\mu(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} e^{-ity} \phi_X(t) dt$$

Beweis.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} e^{-ity} \phi_x(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{x \in \mathbb{Z}} \mu(x) \left(e^{it(x-y)}\right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mu(y) + \sum_{x \neq y} \mu(x) \left(e^{it(x-y)}\right) dt$$

$$= \mu(y) + \frac{1}{2\pi} \sum_{x \neq y} \mu(x) \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{it(x-y)} dt}_{=0}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{itk} = \frac{1}{ik} e^{itk} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{k} \frac{\left(e^{i(k-\pi)} - e^{i(-(k-\pi))}\right)}{2i} = \frac{2}{k} \sin(k\pi) = 0$$

□

Aufgabe H 2. $(X_n)_{n=1}$ *unabhängige {0,1}-wertige ZVen mit* $\mathbb{E}[X_n] = p_n$

$$\operatorname{Var}[1] X_n = p_n(1-p_n) = \infty \Leftrightarrow Z_{k,n} = \frac{X_k - p_k}{\sqrt{\sum_{n=1}^{N} p_n(1-p_n)}} \textit{ Lindeberg (zentriert)}$$

Beweis. "$\Rightarrow$" $\forall \epsilon > 0$:

$$\frac{p_1(1-p_1)}{\sum_{n1}^{N} p_n(1-p_n)} = \operatorname{Var}[1] Z_{1,N} = \mathbb{E}\left[Z_{1N}^2\right] = \int Z_{1,N}^2 \mathbb{1}_{\{|Z_{1,N}| \leq \epsilon\}} dP + \underbrace{\int Z_{1,N}^2 \mathbb{1}_{\{|Z_{1,N}| > \epsilon\}} dP}_{\textit{Lindbergbedingung}}$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \ \limsup_{n \to \infty} \frac{p_n(1-p_n)}{\sum_{n=1}^{N} p_n(1-p_n} \leq \epsilon^2. \text{ Aus } p_1(1-p_1) > 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_1(1-p_1) = \infty$$

"$\Leftarrow$" $\sum_{n \geq 1} p_n(1-p_n) = \infty \ \forall \epsilon > 0 : |Z_{k,n}| \leq \frac{1}{\sqrt{\sum_{n=1}^{N} p_n(1-p_n)}} < \epsilon$ für N groß genug.

Für solche N : $\sum_{k=1}^{N} \int Z_{k,N}^2 \mathbb{1}_{\{|Z_{k,N}| > \epsilon\}} d\mathbb{P} = 0$

□

Aufgabe H 3. $(X_n)_{n \geq 1}$ *unabhängige Zufallsvariablen,* $X_i \sim$ *Exp*$(a), a > 0$.
Zu zeigen: $\limsup_{n \to \infty} \frac{X_n}{\log n} = \frac{1}{\alpha}$ *fast sicher*

Beweis.

- $$A_{k,N} = \left\{ \frac{X_n}{\log n} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{k} \right\}; \ A_k = \limsup_{n \to \infty} A_{k,n}$$
  $$B_{k,N} = \left\{ \frac{X_n}{\log n} > \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{k} \right\}; \ B_k = \limsup_{n \to \infty} B_{k,n}$$
- $X_n \sim \operatorname{Exp}(\alpha), \ \alpha > 0 \ \forall n \geq 1 \ \forall c \in \mathbb{R} \ \mu(X_n > c) = 1 - F_{X_n}(c) = e^{-\alpha c}$
  $\Rightarrow \mu(A_{k,N} = \mu\left(\frac{X_n}{1} > \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{k}\right) \log n\right) = \frac{1}{n^{1+\frac{\alpha}{k}}} \ \mu(B_{k,N}) = \ldots = \frac{1}{n^{1-\frac{\alpha}{k}}}$

- $$\underbrace{\sum_{n\geq 1}\mu(A_k,n)<\infty}_{\mu(A_k)=0} \text{ und } \underbrace{\sum_{n\geq 1}\mu(B_{k,n})=\infty}_{\mu(B_K)=1\forall k}$$

- $$\{\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\log n}=\frac{1}{\alpha}\}=\bigcap_{k\geq 1}A_k^C\cap\bigcap_{k\geq 1}B_K \text{ fast sicher.}$$

$\square$

Auf der Tutoriums aufgabe war ein Fehler!:

<u>T1:</u>

$$\lim_{n\to\infty}e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=?$$

$$\mathbb{E}\left[\liminf \mathbb{1}_{\{\frac{1}{n}\sum^n X_i\leq 1\}}\right]\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\liminf\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\leq 1\}\}}\right] \text{ Hier haben die Klammern gefehlt!}$$

$$\lim_{n\to\infty}e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=\frac{1}{2},\text{ da } e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=P\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\leq n\right)$$

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n(X_i-1)}{\sqrt{n}}\leq 0\right)\xrightarrow{ZGS}N_{0,1}(]-\infty,0[)=\frac{1}{2}$$